Die Normalkraftverteilung des Gürtelreifens

Von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität Hannover

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Günter Willmerding

aus Hannover

1974

Die Normalkraftverteilung des Gürtelreifens

Von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität Hannover

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Günter Willmerding

aus Hannover

1974

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Gauß

Mitberichter: AV und Prof. Dr.-Ing. S. Spierig

Tag der Promotion: 28.10.74

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Institut für Kraftfahrwesen der T.U. Hannover. Durch ein Promotionsstipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz wurde die Arbeit ermöglicht.

Meinen ganz besonderen Dank möchte ich dem Institutsleiter, Herrn Professor Dr.-Ing. F. Gauß für die wertvollen Ratschläge und Anregungen sowie die stets wohlwollende Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit aussprechen.

Zu danken habe ich auch Herrn Professor Dr.- Ing. S. Spierig für die eingehende Durchsicht und das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Den Continental-Gummiwerken, insbesondere Herrn Dr. Birkholz und Herrn Dipl.-Ing. Hahn, danke ich für vielfältige Anregungen aus der Sicht eines Reifenherstellers.

Die Berechnungen für diese Arbeit wurden am "Regionalen Rechenzentrum Niedersachsen" durchgeführt. Den Mitarbeitern des Rechenzentrums danke ich für die vielfach gewährte Unterstützung.

Nicht zuletzt gebührt allen Mitarbeitern des Instituts für Kraftfahrwesen mein Dank, die mich mit fachlichem Rat untersützt haben.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen	1
1.	Einführung	5
2.	Mechanisches Ersatzmodell für einen Radialreifen ohne Umfangslagen	8
2.1.	Die Kräfte infolge des Luftdrucks	10
2.2.	Berechnung des Gleichgewichts mit Hilfe des Seileckverfahrens	10
2.3.	Arbeitshypothese zur Herleitung eines Näherungsverfahrens zur Bestimmung der Gleichgewichtsform	17
2.4.	Die Gleichgewichtsform eines Radialreifens ohne Umfangslagen	17
2.4.1.	Berechnung der Gleichgewichtsform	17
2.4.1.1.	Programmablauf	17
2.4.1.2.	Vorgabe eines Stabsystems	24
2.4.1.3.	Berechnung eines Kraftfeldes $\vec{K}_N$ für das Stabsystem	25
2.4.1.4.	Bestimmung der Kraft ZA	26
2.5.	Die Gleichgewichtsform des Radialreifens ohne Umfangslagen mit Berücksichtigung von Korddehnungen	27
3.	Der unbelastete Gürtelreifen (Radlast = 0)	29
3.1.	Mechanisches Ersatzmodell für einen Gürtelreifen	29
3.2.	Berechnung der Gleichgewichtsform des Gürtelreifens	29
4.	Der durch eine Vertikalkraft belastete Gürtelreifen	35
4.1.	Der nicht rollende Reifen	35
4.1.1.	Die Vorgänge im Reifen unmittelbar im Bereich über der Aufstandsfläche	35

		Seite
4.1.1.1.	Die Lage des Stabnetzes unmittelbar über der Aufstandsfläche	35
4.1.1.2.	Die Ersatzkräfte für den Luftdruck im Bereich unmittelbar über der Aufstandsfläche	42
4.1.2.	Die Querschnittsform des verformten Gürtelreifens	48
4.1.2.1.	Die Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt	53
4.1.3.	Die Normaldruckverteilung des Gürtelreifens ohne Berücksichtigung des Einflußes von Biegesteisteifigkeiten	55
4.1.4.	Die Kräfte in den Gürtelstäben beim unbelasteten Reifen	60
4.1.5.	Der Einfluß der Biegesteifigkeiten auf die Normaldruckverteilung	61
4.1.5.1.	Vergleich der Biegelinie eines Balkens und der eines mit Drehfedern verbundenen Stabsystems	61
4.1.5.2.	Die Biegesteifigkeit von Seitenwand und Gürtel in den Z-R-Ebenen	68
4.1.5.3.	Die Biegesteifigkeit des Gürtels in Umfangsrichtung	73
4.1.5.4.	Die Form des Ein-und Auslaufs	77
4.2.	Der frei rollende Luftreifen bei niedrigen Rollgeschwindigkeiten	79
4.2.1.	Allgemeines zur Berechnung des rollenden Reifens	79
4.2.2.	Die Relativbewegungen im Stabnetz der Aufstandsfläche	82
5.	Ergebnisse der Berechnungen	88
5.1.	Der Zusammenhang zwischen Herstellungsform und Reifeneigenschaften	88
5.1.1.	Die geometrischen Beziehungen zwischen der Form des Reifens und dem Ersatzmodell	88
5.1.2.	Die Kraftverteilung im Gürtel beim unverformten Reifen	90
5.1.3.	Der Zusammenhang zwischen Querschnittsform des Gürtels und der Normaldruckverteilung	100
5.1.3.1.	Die Abhängigkeit der Normaldruckverteilung vom Luftdruck	100
5.1.3.2.	Die Bedeutung des Gürtelquerschnitts und des Laufflächenquerschnitts für die Normaldruckverteilung	101
5.1.3.3.	Der Einfluß der Einfederung und der Biegesteifigkeiten	105
5.1.3.4.	Vergleich der Rechenergebnisse mit veröffentlichten Messungen	113
5.2.	Die Verschiebungen und Gleitbewegungen im Bereich der Aufstandsfläche in Abhängigkeit von der Reifenquerschnittsform	114
6.	Zusammenfassung	119
7.	Reifendaten	120
8.	Literaturverzeichnis	121

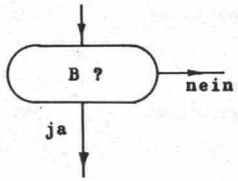
Verwendete Operationszeichen und Abkürzungen, die von der Norm abweichen

$A \cdot B = A * B$ Multiplikation von A mit B

$A/B*C = \frac{A}{B} * C$

$A \leftarrow B$ Der Variablen A wird der Wert der Variablen B zugewiesen. Daher ist folgender Ausdruck möglich: $A \leftarrow A + 1$, was bei Verwendung eines Gleichheitszeichens nicht richtig wäre.

$N = A|B|C$ Dieser Ausdruck soll eine Laufanweisung für die Variable N darstellen. Beginnend bei N=A soll N so lange um die Schrittweite B vergrößert werden, bis $N \geq C$ ist.



Aus Platzgründen wurde abweichend von den DIN-Normen in Programmlaufplänen der nebenstehend abgebildete Block als Darstellung für logische Abfragen verwendet. Wenn die Bedingung B erfüllt ist, so wird der mit "ja" gekennzeichnete Weg durchlaufen. Ist die Bedingung B nicht erfüllt, so wird der mit "nein" gekennzeichnete Weg durchlaufen.

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen

A_N	cm^2	Fläche auf die Luftdruck p wirkt
AE,AL	cm	Halbmesser der Gürtel-bzw Laufflächenellipse
BX,BY,BZ	cm	Koordinaten zur Beschreibung der Stäbe und Gelenke unmittelbar über der Aufstandsfläche
BE,BL	cm	Halbmesser der Gürtel-bzw Laufflächenellipse
B	cm	Breite des Reifens vor dem Bombiervorgang
B_F	cm	Felgenbreite des Ersatzmodells
C_N	cm kp/rad	Federsteife,die die Biegesteifigkeit in der Z-M-Ebene ersetzt
CG_N	cm kp/rad	Federsteife,die die Biegesteifigkeit in Umfangsrichtung ersetzt
$\overrightarrow{DK}_N$	kp	Kraft,die im Bereich der Aufstandsfläche die Wirkung des Luftdrucks ersetzt
D	cm	Innendurchmesser des Ersatzmodells
DA	cm	Außendurchmesser des Ersatzmodells
E	-	Ebenennummer
ENP	cm	Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Drehachse
E_{Stab}	Kp/cm^2	Elastizitätsmodul eines Radialstabes
E_{Kord}	Kp/cm^2	Elastizitätsmodul eines Kordfadens

F_{Stab}	cm^2	Querschnittsfläche eines Radialstabes
F_{Kord}	cm^2	Querschnittsfläche eines Kordfadens
F	cm	zulässige Abweichung der Z_1-Koordinate von $B_F/2$
f	cm	vertikale Einfederung des Reifens
$f_{0_{E,N}}, f_{1_{E,N}}$	cm	Schubverformungsweg des Vertikalstabes E,N zum Zeitpunkt t_0 bzw t_1
F1	cm	zulässige Abweichung der R_1-Koordinate von D/2
GUERTZ	-	Anzahl der Vertikalstäbe pro Halbebene und gleichzeitig Anzahl der Gürtelstäbe pro Halbebene
$\overrightarrow{GK1}_N, \overrightarrow{GK2}_N$	kp	Schnittkraft im Gürtelstab mit der Nummer N
$\overrightarrow{GK}_N$	kp	Schnittkraft im Gürtel beim unverformten Reifen
GR	cm	Gürtelradius
GRNP	cm	Abstand des Gürtelkreismittelpunktes von der Drehachse beim unverformten Reifen
J	-	Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt pro Halbebene
$\vec{K}_N$	kp	Kraft, die die Wirkung des Luftdrucks p auf das Ersatzsystem beschreibt
i ; q	-	Anzahl der Schleifendurchläufe in einem Rechenprogramm
i_{min} ; q_{min}	-	geforderte Anzahl von Schleifendurchläufen in einem Rechenprogramm
LO	cm	halbe Länge eines Radialstabes im ungedehnten Zustand

LX_N	cm	Länge des Gürtelstabes am Gelenk mit der Nummer N
M	-	Anzahl der Gelenke bzw. Drehfedern pro Z-R-Ebene
N	-	Nummer der Gelenk-und Hilfspunkte
n_{Kord}	$1/cm^2$	Kordfadendichte
$\overrightarrow{NK}_N$	kp	Normalkraft, die durch den Luftdruck p verursacht wird
$\overrightarrow{NKM}_N$	kp	Normalkraft infolge der Federsteife C_N
$\overrightarrow{NKG}_N$	kp	Normalkraft infolge der Federsteife CG_N
p	kp/cm^2	Luftüberdruck des Reifens gegenüber dem Atmosphärendruck
PN_G	kp/cm^2	Normaldruck infolge Biegesteife des Gürtels
PN_W	kp/cm^2	Normaldruck infolge Biegesteife der Seitenwand
PN_L	kp/cm^2	Normaldruck infolge Luftdruck p
PN_{ges}	kp/cm^2	Gesamtnormaldruck
R	cm	Koordinate zur Beschreibung der Querschnittsform in der Ebene E
$\overrightarrow{SLG}_N$	kp	Schnittkraft im Radialstab im Gürtelbereich
$\overrightarrow{SL}_N$	kp	Schnittkraft im Radialstab
$\overrightarrow{UGES}_{E,N}$	cm	Relativweg des Punktes E,N gegenüber der Fahrbahn
VSL_N	cm	Länge des Vertikalstabes am Gelenk mit der Nummer N

$\overrightarrow{VGES}$	m/sec	Geschwindigkeit des Reifenschwerpunktes
$\overrightarrow{VEGES}_{E,N}$	cm/sec	Relativgeschwindigkeit des Punktes E,N gegenüber der Fahrbahn
ZA	kp	Schnittkraft in Z-Richtung im Stab L_{M-J}
ZAR	kp	Schnittkraft im Stab L_{M-J} in R-Richtung
Z	cm	Koordinate zur Beschreibung der Querschnittsform in der Ebene E
λ	-	Schlupf
ψ_E	rad	Winkel zwischen der Ebene E und der Ebene 1
φ_N	rad	Winkel zwischen der Richtung des Stabes L_N und der Z-Richtung
ω	1/sec	Winkelgeschwindigkeit des Reifens
$\mu_{E,N}$	-	Reibwert zwischen Fahrbahn und Vertikalstab
δ_E	rad	Winkel zwischen Ebene E und Ebene 1

Einführung

Dem Reifen als Bindeglied zwischen Fahrzeug und Fahrbahn kommt größte Bedeutung zu. Es müssen Bremskräfte, Antriebskräfte (Umfangskräfte), Kräfte bei Kurvenfahrt (Seitenkräfte) und Radlasten (Vertikalkräfte) übertragen werden. Diese Kräfte und ihre Abhängigkeit von vielen Parametern bestimmen maßgeblich die Fahrsicherheit.

Neben der Fahrsicherheit ist auch die Wirtschaftlichkeit eines Reifens ein wichtiges Beurteilungskriterium.
Der Reifenverschleiß, ein wesentlicher Punkt für die Wirtschaftlichkeit eines Reifens, ist einerseits von den verwendeten Materialien, insbesondere der Gummimischung, abhängig, zum anderen verursachen Gleitbewegungen des Gummis gegenüber der Fahrbahn schon beim frei rollenden Reifen Abrieb. Die Größe dieser Gleitbewegungen des Gummis gegenüber der Fahrbahn läßt sich durch konstruktive Maßnahmen beeinflussen. So weist z. B. der Gürtelreifen gegenüber dem Diagonalreifen ein sehr viel günstigeres Verschleißverhalten auf, weil die Gleitbewegungen zwischen Reifen und Fahrbahn beim Gürtelreifen sehr viel geringer sind.

Bei der Konstruktion eines Reifens ist bekannt, was für Reifeneigenschaften erzielt werden sollen. Aufgrund des komplizierten Reifenaufbaus ist eine exakte Vorausberechnung der Reifeneigenschaften sicherlich nicht möglich, doch wird eine zunehmende Kenntnis der Mechanik des Luftreifens die Züchtung bestimmter Eigenschaften erleichtern.
Es hat sich herausgestellt, daß die Normaldruckverteilung in der Reifenaufstandsfläche das Verhalten des Reifens wesentlich beeinflußt. Die Abhängigkeit der Normaldruckverteilung von Querschnittsgeometrie, Cordfadengeometrie, Biegesteifigkeit der Seitenwand und des Gürtels ist bisher theoretisch noch nicht untersucht worden, obwohl deren Kenntnis die Reifenkonstruktion erleichtern würde.

Ziel dieser Arbeit ist es, für den Gürtelreifen diese Zusammenhänge zu erfassen.

Die Normaldruckverteilung in der Aufstandsfläche ist bereits mehrfach gemessen worden [1,2,6,23] .
Auch wurden Versuche an Reifenmodellen durchgeführt,um die Ursache des Verlaufs der Normaldruckverteilung klären zu können.
So hat z.B. Clark [3] an Hand eines dünnwandigen Hohlzylinders aus Metall als Ersatzmodell für einen Luftreifen den Einfluß von Biegesteifigkeiten,Luftdruck und Größe der Aufstandsfläche auf die Normaldruckverteilung untersucht.

Da Reifen aus mehreren übereinanderliegenden,gummierten Gewebebahnen mit verschiedenen,von der Reifenbauart und Querschnittsform abhängigen Gewebewinkeln sowie der aufvulkanisierten Laufschicht bestehen und somit recht kompliziert aufgebaut sind,verwundert es nicht,daß die ersten theoretischen Untersuchungen des Reifens einfache ebene Ersatzmodelle zugrunde legten.So wurde zur Untersuchung der Flattererscheinung an Flugzeugreifen ein gespanntes Seil auf elastischer Unterlage,das sogenannte Seilmodell,verwendet.
Fiala [9] behandelt den Reifen unter Einbeziehung der Karkasseneigenschaften mit Hilfe eines Balkens auf nachgiebiger Unterlage als Ersatzmodell.
Daß das Seilmodell für den Kreuzkordreifen ein physikalisch begründbares Ersatzmodell ist,wird in [5] gezeigt.Ausgehend von einer rotationssymmetrischen Schale werden über Energiebeziehungen die Gleichungen für das Seilmodell hergeleitet.Die Bedeutung dieser Herleitung liegt darin,daß erstmals ein Zusammenhang zwischen einem räumlichen Ersatzmodell (Schale) und einem ebenen Modell (Seilmodell) aufgezeigt wurde, so daß die Parameter in der Gleichung für das Seilmodell physikalisch gedeutet werden können.

Böhm [10] behandelt den Kreuzkordreifen sehr ausführlich mit Hilfe der Membrantheorie.Er berechnet die Gleichgewichtsform unter alleiniger Wirkung des Innendruckes und es gelingt weiterhin Gleichungen für Verformungen wie Abplattung und seitliche Verformung durch Führungskräfte des Luftreifens zu ermitteln.Für den Gürtelreifen wird u.a. das Schwingungsverhalten untersucht.Die Normaldruckverteilung des Gürtelreifens wird jedoch nicht berechnet.

Die Vorgänge in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Fahrbahn sind experimentell schon mehrfach untersucht worden.So wurden die Reibungskräfte in der Aufstandsfläche mehrfach untersucht,was teilweise experimentell teilweise mit Hilfe von Ersatzmodellen geschah. Dennoch konnten die komplizierten Vorgänge in der Aufstandsfläche bisher nur bedingt geklärt werden.

Der Luftreifen wurde bereits mit sehr viel rechnerischen und experimentellem Aufwand untersucht.Bisher ist es jedoch nicht gelungen, die Normaldruckverteilung in der Aufstandsfläche zu berechnen.
Dies liegt sicherlich daran,daß es mit Hilfe der Schalentheorie nur schwer möglich ist nicht rotationssymmetrische Vorgänge zu behandeln.

In der vorliegenden Arbeit wird der Gürtelreifen durch ein orthogonales Stabsystem,das die Kordfäden repräsentiert,und ein Vertikalstabsystem, das die Lauffläche darstellt,ersetzt.Die rechnerische Behandlung ist dann relativ leicht möglich.

Der Kreuzkordreifen kann mit den verwendeten Rechenverfahren nicht berechnet werden.Dies wurde auch nicht angestrebt,da die Bedeutung des Kreuzkordreifens ständig abnimmt.

2. Mechanisches Ersatzmodell für einen Radialreifen ohne Umfangslagen

Zur Berechnung der Gleichgewichtsform hat es sich als zweckmäßig und vertretbar erwiesen anzunehmen, daß wegen der Plastizität des Gummis unmittelbar vor der Vulkanisation die Berechnung der Reifenform auf die Berechnung eines durch Innendruck verformten Kordnetzes zurückgeführt werden kann [4] . Diese vereinfachende Annahme soll auch hier getroffen werden.

Die Biegesteifigkeit eines Kordfadens ist sehr klein, so daß praktisch keine Momente übertragen werden können. Es ist daher möglich, einen Faden durch ein gelenkig verbundenes System von Stäben zu ersetzen. Dieses Ersatzsystem wird um so genauer die Eigenschaften eines Fadens annehmen, je kleiner die Stablänge ist. Bei geeigneter Wahl des Stab-E--Moduls kann auch das Dehnungsverhalten des Fadens beschrieben werden. Ersetzt man nun in einem Radialreifen jeden Kordfaden durch ein Stabsystem, so ergibt sich eine große Anzahl von Stäben und Gelenken. Vereinfachend kann man mehrere benachbarte Fäden durch ein Stabsystem ersetzen, das die Eigenschaften mehrerer Fäden gleichzeitig repräsentieren soll (Bild 1,2). Das Laufflächengummi wird durch Stäbe ersetzt, die jeweils an einem Gelenk angreifen. Diese Vertikalstäbe sollen im Bereich der Aufstandsfläche immer senkrecht zur Fahrbahnoberfläche stehen, so daß der Abstand der zugehörigen Gelenke von der Straßenoberfläche durch die Vertikalstablänge bestimmt ist (Bild 4).

Es werden zunächst Betrachtungen an einem Radialreifen ohne Umfangslagen (Bild 2) angestellt, um anschließend die kompliziertere Berechnungsweise beim Gürtelreifen (Bild 1) einfacher darstellen zu können.

Weiterhin wurde ein Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe der Einfluß der Kordfadenelastizität bestimmt werden kann, das aber beim Radialreifen mit Umfangslagen nicht angewendet wurde, da die Rechenzeit des EDV-Programms anstieg.

Wenn ein Element des Reifens mit der Kordfadenzahl n_{Kord} durch ein Stabsystem ersetzt wird, so gilt für das Verhältnis der Stabkräfte SL_{Stab} zu den Kordkräften SL_{Kord}:

$$(1) \qquad \frac{SL_{Stab}}{SL_{Kord}} = n_{Kord}$$

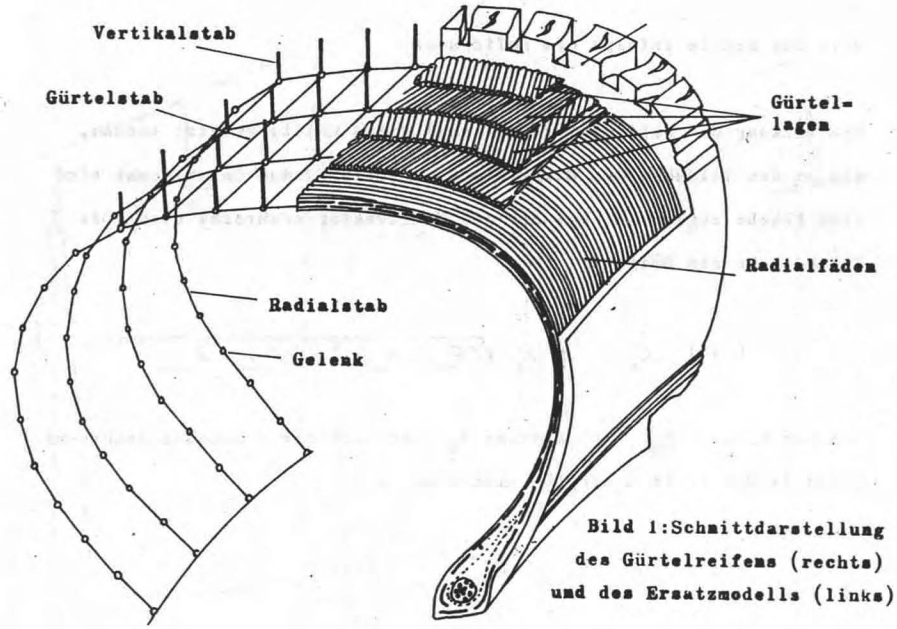


Bild 1: Schnittdarstellung des Gürtelreifens (rechts) und des Ersatzmodells (links)

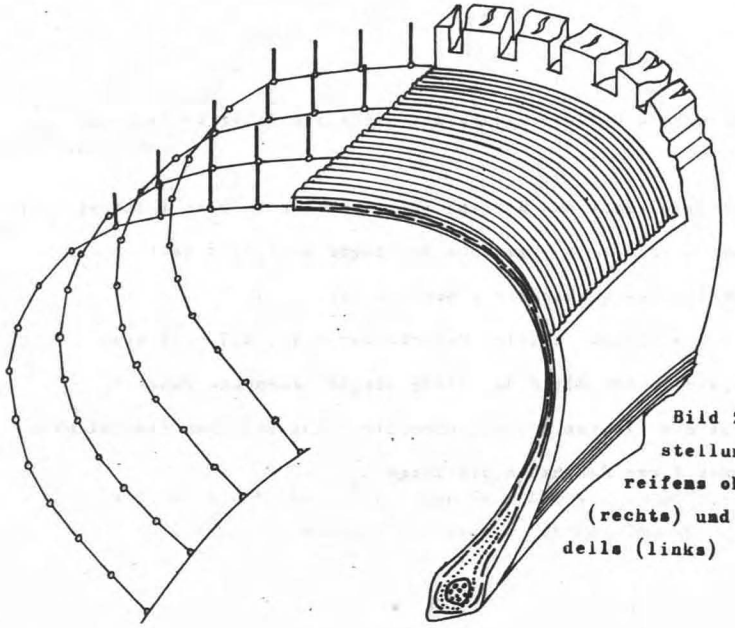


Bild 2: Schnittdarstellung eines Radialreifens ohne Umfangslagen (rechts) und des Ersatzmodells (links)

2.1. Die Kräfte infolge des Luftdrucks

Die Wirkung des Reifenluftdrucks soll durch Kräfte ersetzt werden, die an den Gelenken des Stabsystems angreifen. Jedem Gelenkpunkt wird eine Fläche zugeordnet, auf der der Kraftvektor senkrecht steht. Die Fläche habe den Betrag:

$$(2) \quad A_N = \delta \cdot R_N \cdot \sqrt{(R_{N+1} - R_{N-1})^2 + (Z_{N+1} - Z_{N-1})^2}$$

und den Winkel φ_{N+1} zur R-Achse. A_N stehe auf der Z,R-Ebene senkrecht (Bild 3). Die Kraft $\vec{K}_N$ ergibt sich dann zu:

$$(3) \quad \vec{K}_N = p \cdot A_N \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{N+1} \\ \sin \varphi_{N+1} \end{pmatrix}$$

2.2. Berechnung des Gleichgewichts mit Hilfe des Seileckverfahrens

Für jedes Winkelelement des Reifens liegt nun das in Bild 4 dargestellte Ersatzsystem zu Grunde. Da Symmetrie vorliegen soll, wird jeweils nur die linke Hälfte des Querschnitts betrachtet.

Die Punkte 1,2,4,6,8,10 stellen Gelenke dar, 1,3,5,7,9,11 sind Hilfspunkte, die in der Mitte der Stäbe liegen (Ausnahme Punkt 1) und durch die die Flächen A_N verlaufen. Die Stäbe zwischen den Gelenken mit der Nummer N und N-2 haben die Länge L_N.

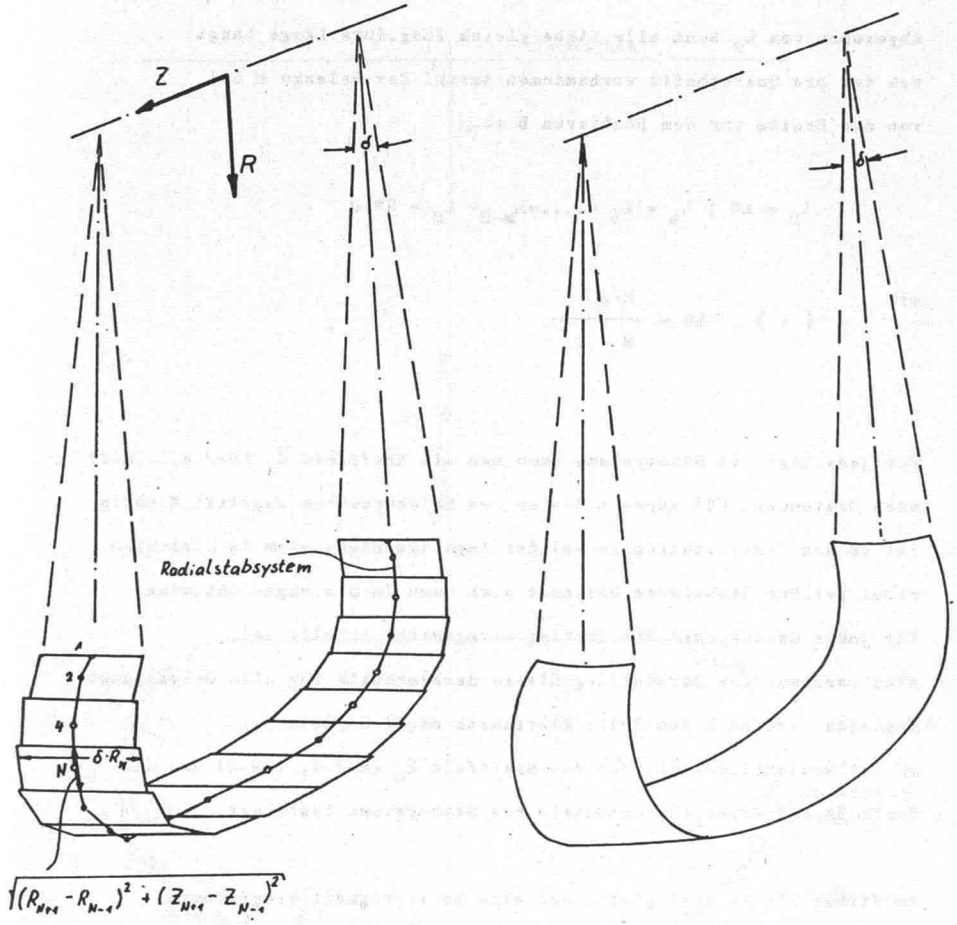


Bild 3: Rechts Winkelelement der Karkasse eines Radialreifens
Links Ersatzmodell für dieses Winkelelement

Abgesehen von L_2 sind alle Stäbe gleich lang. Ihre Länge hängt von der pro Querschnitt vorhandenen Anzahl der Gelenke M und von der Breite vor dem Bombieren B ab.

$$L_2 = L0 \; ; \; L_4 = L_6 = \ldots = L_{M-2} = L_M = 2*L0$$

mit

$$(4) \qquad L0 = \frac{B/2}{M-2}$$

Für jede Lage des Stabsystems kann man ein Kraftfeld $\vec{K}_N$ (N=2,4,..,M-2) nach Gleichung (3) angeben, das in den Gelenkpunkten angreift. Wichtig ist es nun festzustellen, in welcher Lage das Stabsystem im Gleichgewicht ist. Das Stabsystem befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn für jeden Gelenkpunkt das Kräftegleichgewicht erfüllt ist.
Eine anschauliche Darstellung dieses Sachverhalts für alle Gelenkpunkte zugleich ist nach dem Seileckverfahren möglich (Bild 5).
Es ist ersichtlich, daß, wenn das Kraftfeld $\vec{K}_N$ (N=2,4,..,M-2) und die Kraft ZA vorliegen, die Geometrie des Stabsystems festliegt.

An dieser Stelle soll gleich auf eine Schwierigkeit hingewiesen werden, die durch die Annahme, daß $\vec{K}_N$ bekannt ist, zunächst umgangen wird. Zur Berechnung von $\vec{K}_N$ ist nämlich bereits die Kenntnis der Querschnittsgeometrie des Radialstabsystems erforderlich (s. Gleichung 3), die sich im Gleichgewicht unter Wirkung von $\vec{K}_N$ befindet. Diese Querschnittsgeometrie ist aber gerade gesucht. Dieses Problem wird zunächst zurückgestellt und es wird angenommen, daß die Kräfte $\vec{K}_2, \vec{K}_4, \ldots, \vec{K}_{M-2}$ und die Winkel $\varphi_3, \varphi_5, \ldots, \varphi_{M-1}$, die die Richtung der genannten Kräfte angeben, bekannt sind. Dann lassen sich die Winkel $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{M-2}$, die

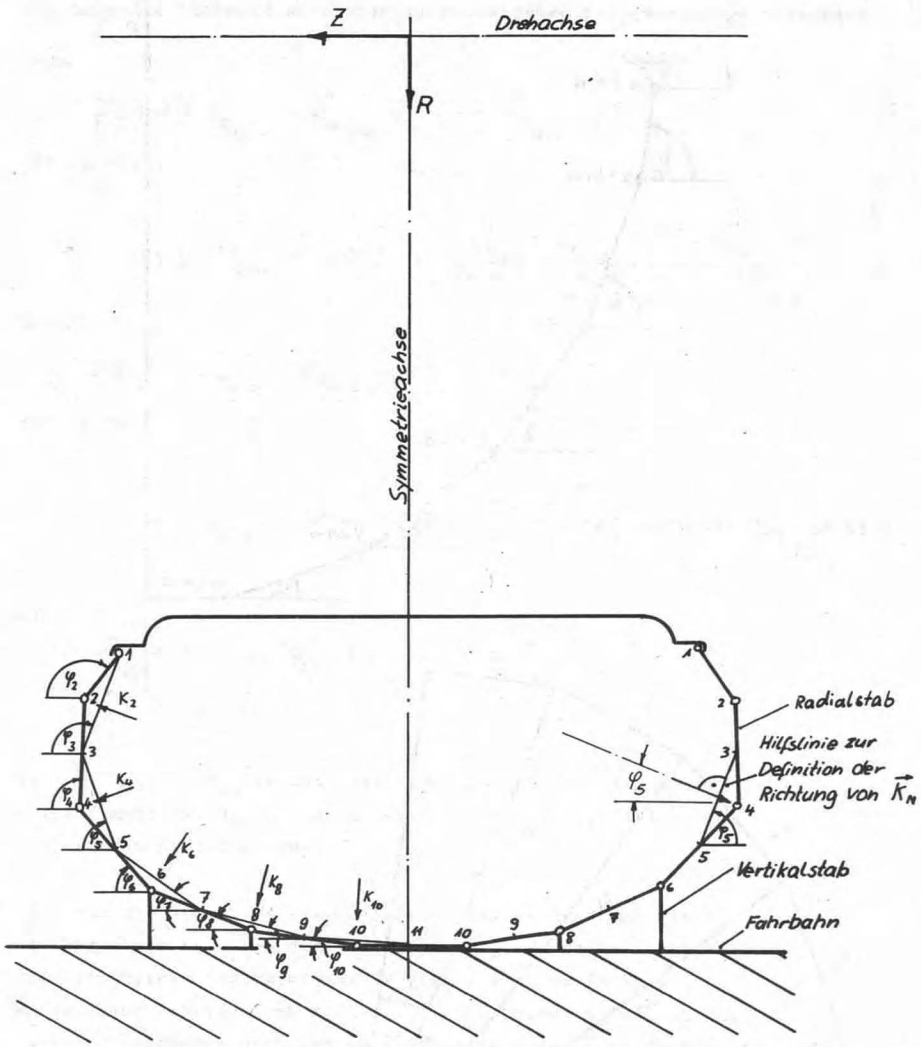


Bild 4: Querschnitt des Ersatzmodells für den Radialreifen ohne Umfangslagen

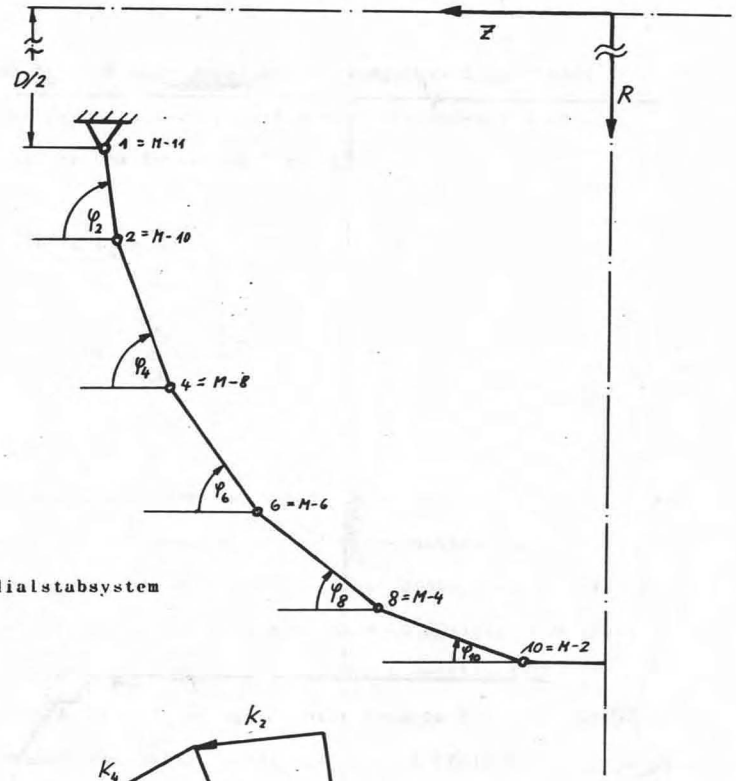


Bild 5a: Radialstabsystem

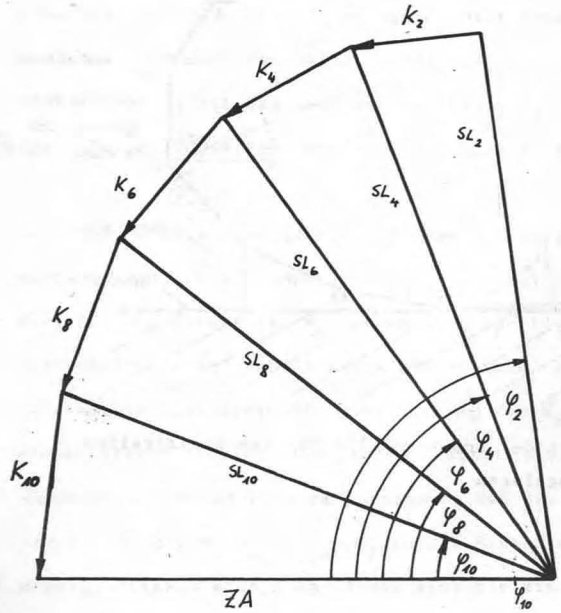


Bild 5b: Zum Radialstabsystem gehöriges Seileck

die Lage des Stabsystems eindeutig beschreiben, folgendermaßen berechnen:

Wenn

$$ZA > |\vec{K}_{Z_{M-2}} + \vec{K}_{Z_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-N}}|$$

dann gilt:

$$(5)\quad \varphi_{M-N} = ARCTAN \frac{|\vec{K}_{R_{M-2}} + \vec{K}_{R_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{R_{M-N}}|}{ZA - |\vec{K}_{Z_{M-2}} + \vec{K}_{Z_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-N}}|}$$

Wenn

$$ZA < |\vec{K}_{Z_{M-2}} + \vec{K}_{Z_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-N}}|$$

dann gilt:

$$(6)\quad \varphi_{M-N} = \pi + ARCTAN \frac{|\vec{K}_{R_{M-2}} + \vec{K}_{R_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{R_{M-N}}|}{ZA - |\vec{K}_{Z_{M-2}} + \vec{K}_{Z_{M-4}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-N}}|}$$

mit

$$\vec{K}_{Z_N} = \vec{K}_N \cdot SIN(\varphi_{N+1})$$
$$\vec{K}_{R_N} = \vec{K}_N \cdot COS(\varphi_{N+1})$$

Wenn $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{M-2}$ bekannt sind, dann lassen sich die Koordinaten der Gelenkpunkte R_N, Z_N wie in dem in Bild 5c dargestellten Programmlaufplan berechnen.

Will man die Geometrie des Radialstabsystems bestimmen, in der Gleichgewicht zwischen den Kräften $\vec{K}_N, \vec{SL}_N$, und ZA herrscht, also die Gleichgewichtsform, so ist folgendes Problem zu lösen: $\vec{K}_N$ ist eine Funktion von R_N und Z_N. Die Felder R_N und Z_N sind aber gesucht, doch ist zu ihrer Berechnung $\vec{K}_N$ erforderlich. Damit ist eine exakte Lösung nicht möglich. Im Folgenden wird daher ein Näherungsverfahren angegeben, mit dessen Hilfe eine Lösung berechnet werden kann.

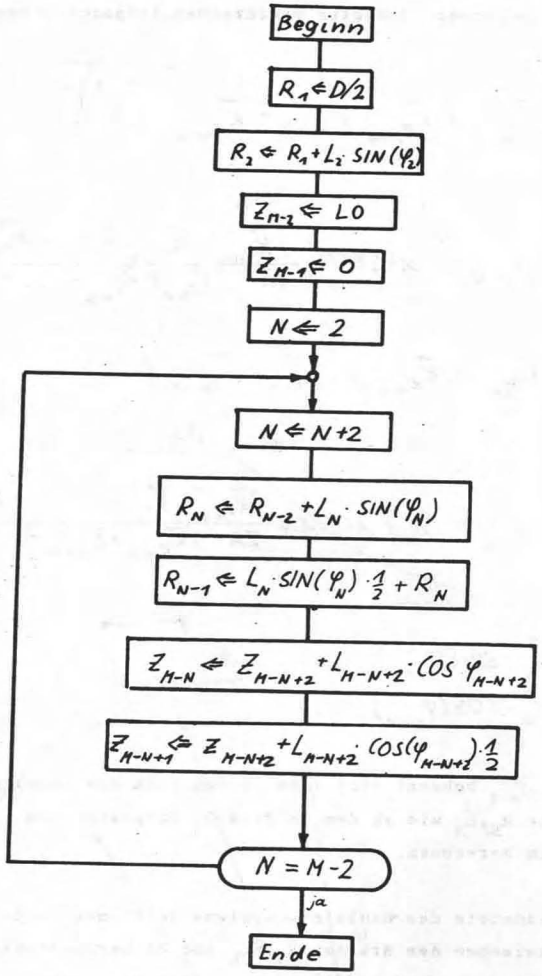


Bild 5c: Programmablaufplan zur Berechnung der Koordinaten R_N und Z_N.

2.3. Arbeitshypothese zur Herleitung eines Näherungsverfahrens zur Bestimmung der Gleichgewichtsform

Es liege ein Stabsystem wie in Bild 5a vor, für das gelten soll:

$$R_N \geq D/2 \quad , \quad R_{N+1} \geq R_N \quad , \quad Z_1 > Z_{M-1}$$

$$\text{für } N = 1,2, \ldots\ldots , M-2$$

Wirkt auf dieses Stabsystem ein Kraftfeld gemäß Gleichung 3, so wird sich die Geometrie des Stabsystems infolge dieses Kraftfeldes ändern, falls nicht schon die Gleichgewichtsform vorlag.
Nimmt man vereinfachend an, daß $\vec{K}_N$ (N=2,4,....,M-2) dabei konstant bleibt (obwohl $\vec{K}_N = f(R_N, Z_N)$), so weicht die sich ergebende Form des statischen Gleichgewichts für das Stabsystem weniger von der Gleichgewichtsform ab als vor der Änderung.

2.4. Die Gleichgewichtsform des Radialreifens ohne Umfangslagen

2.4.1. Berechnung der Gleichgewichtsform

2.4.1.1. Programmablauf

Der Programmlaufplan für ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Gleichgewichtsform ist in Bild 6 dargestellt.
Mit seiner Hilfe ist am einfachsten zu verstehen, wie bei der Berechnung der Gleichgewichtsform vorgegangen wurde. Die in diesem Programmlaufplan angesprochenen Unterprogramme werden in den Abschnitten 2.4.1.2. und 2.4.1.4. näher beschrieben.

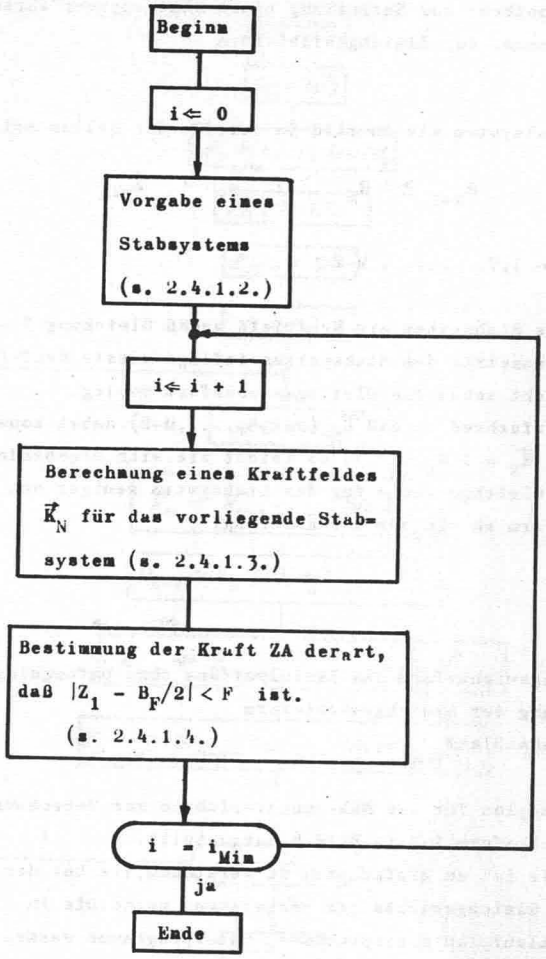


Bild 6: Programmlaufplan zur Berechnung der Gleichgewichtsform eines Radialreifens ohne Umfangslagen.

Nach der Hypothese von 2.3. ist nach jedem Durchlauf der Schleife des in Bild 6 dargestellten Programmlaufplans eine bessere Näherung für die Gleichgewichtsform erreicht als sie zuvor vorlag.

Um diese Hypothese überprüfen zu können, muß zunächst einmal ein Maß für die Abweichung von der Gleichgewichtsform gefunden werden. Es ist möglich die Abweichung der berechneten Näherung von der Gleichgewichtsform mit Hilfe des Seilecks anzugeben.

Zur Erläuterung muß auf das Rechenverfahren zur Bestimmung der Gleichgewichtsform näher eingegangen werden.
Bild 7a zeigt ein Stabsystem, für das nach Gleichung (3) ein Kraftfeld $\vec{K}_N$ berechnet wurde. Dieses Kraftfeld $\vec{K}_N$ ist in Bild 7 b dargestellt
Nun wird ein Stabsystem berechnet, das unter Wirkung des Kraftfeldes $\vec{K}_N$ im Gleichgewicht ist. Dieses Stabsystem zeigt Bild 7c.
Für dieses im Bild 7c dargestellte Stabsystem wird erneut nach Gleichung 3 ein Kraftfeld $\vec{K}_N'$ berechnet. Sind nun die Kraftfelder $\vec{K}_N$ und $\vec{K}_N'$ identisch, so liegt exakt die Gleichgewichtsform vor.
Bild 7d zeigt die Kraftfelder $\vec{K}_N$ und $\vec{K}_N'$. In diesem Fall weichen $\vec{K}_N$ und $\vec{K}_N'$ voneinander ab, so daß das im Bild 7c gezeigte Stabsystem nicht die Gleichgewichtsform annimmt.
Die Differenz der Kraftfelder

$$\overrightarrow{FGES}_N = \vec{K}_N - \vec{K}_N' = -\vec{K}_N' - \overrightarrow{SL}_{N+2} - \overrightarrow{SL}_N$$

ist ein Maß für die Abweichung von der Gleichgewichtsform und damit zur Beurteilung von berechneten Stabgeometrien geeignet.

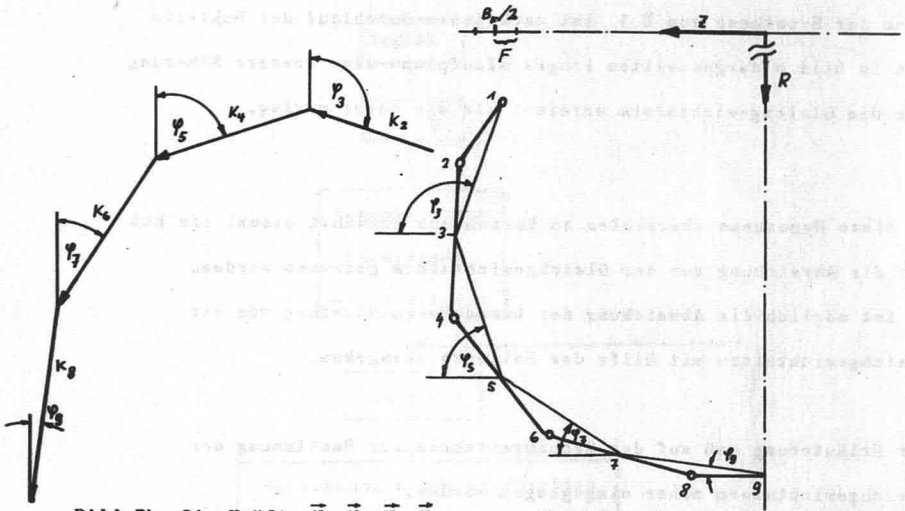


Bild 7b: Die Kräfte $\vec{K}_2, \vec{K}_4, \vec{K}_6, \vec{K}_8$ sind nach Gleichung (3) für das im Bild 7a vorliegende Stabsystem berechnet worden.

Bild 7a: Für das hier vorliegende Stabsystem wird ein Kraftfeld $\vec{K}_N$ berechnet

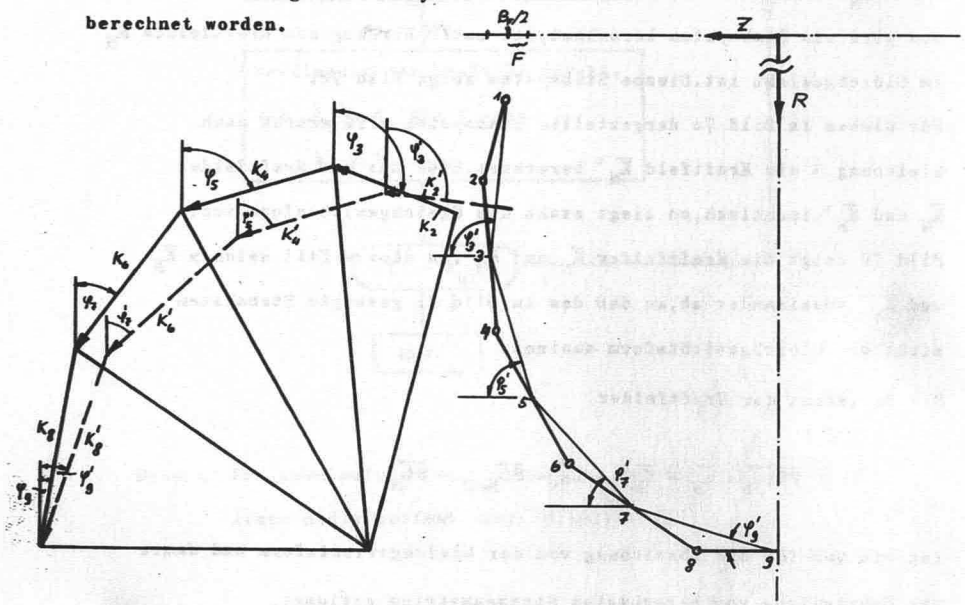


Bild 7d: Seileck für das in Bild 7c dargestellte Stabsystem

Bild 7c: Dieses Stabsystem ist unter Wirkung der Kräfte $\vec{K}_2, \vec{K}_4, \vec{K}_6, \vec{K}_8$ im Gleichgewicht.

Um die Güte des Rechenverfahrens zu untersuchen, wurde der Fehler FGES über der Anzahl der Rechenschritte aufgetragen (Bild 8). Als Rechenschritt wird je ein Durchlauf der Schleife des in Bild 6 dargestellten Programmlaufplans bezeichnet. Die Variable i in diesem Programmlaufplan gibt somit die Zahl der Rechenschritte an.

Betrachtet man Bild 8, so fällt auf, daß der Fehler $FGES_N$ zunächst bis zum vierten Rechenschritt abfällt, dann jedoch nahezu konstant bleibt. Dies scheint zunächst im Widerspruch zu der unter 2.3. aufgestellten Hypothese zu stehen. In der Hypothese wird jedoch vorausgesetzt, daß Z_1 immer gleich $B_F/2$ ist, was bedingt durch das verwendete Rechenverfahren nicht erreichbar war. Stattdessen mußte ein Intervall $|Z_1 - B_F/2| < F$ zugelassen werden.

Von der Breite dieses Intervalls ist die erreichbare Annäherung an die Gleichgewichtsform abhängig. Verringert man F, so ist die erreichbare Annäherung an die Gleichgewichtsform besser und damit $FGES_N$ geringer. (Bild 9). Eine echte Konvergenz des Rechenverfahrens liegt nur dann vor, wenn F=0 ist.

Dennoch ist es möglich die Gleichgewichtsform beliebig genau zu berechnen, wenn F genügend klein gewählt wird.

An Hand des Verlaufs der Kurve $FGES_N = f(i)$ (Bild 8 und 9) kann auch das zweckmäßige i_{Min} (Bild 6) gewählt werden. Wenn der nahezu horizontale Verlauf der Kurve $FGES_N = f(i)$ erreicht wird, lohnen sich weitere Rechenschritte nicht mehr, da der Fehler $FGES_N$ nicht mehr vermindert wird. Die Anzahl der Rechenschritte, bei der $FGES_N = f(i)$ in den horizontalen Verlauf übergeht, ist somit als i_{Min} zweckmäßig. In den durchgeführten Rechnungen wurde $i_{Min}=5$ und F=0,2 cm gewählt.

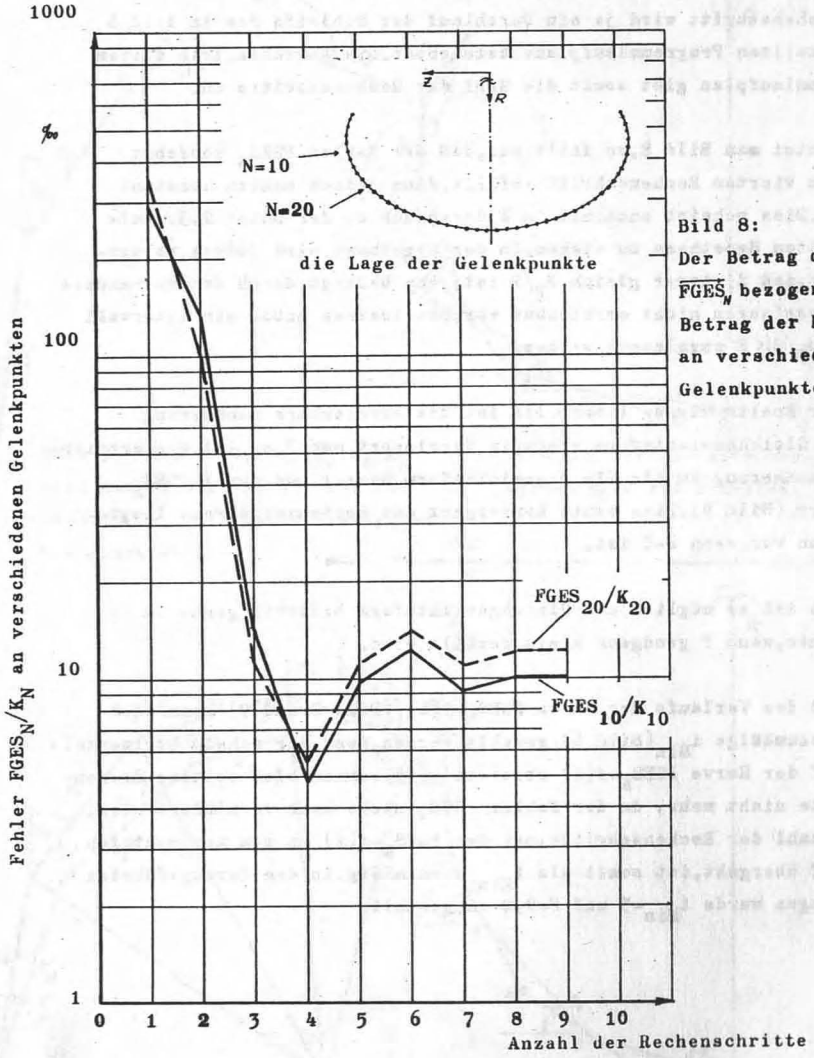


Bild 8:
Der Betrag des Fehlers $\overline{FGES}_N$ bezogen auf den Betrag der Kraft $\overline{K}_N$ an verschiedenen Gelenkpunkten

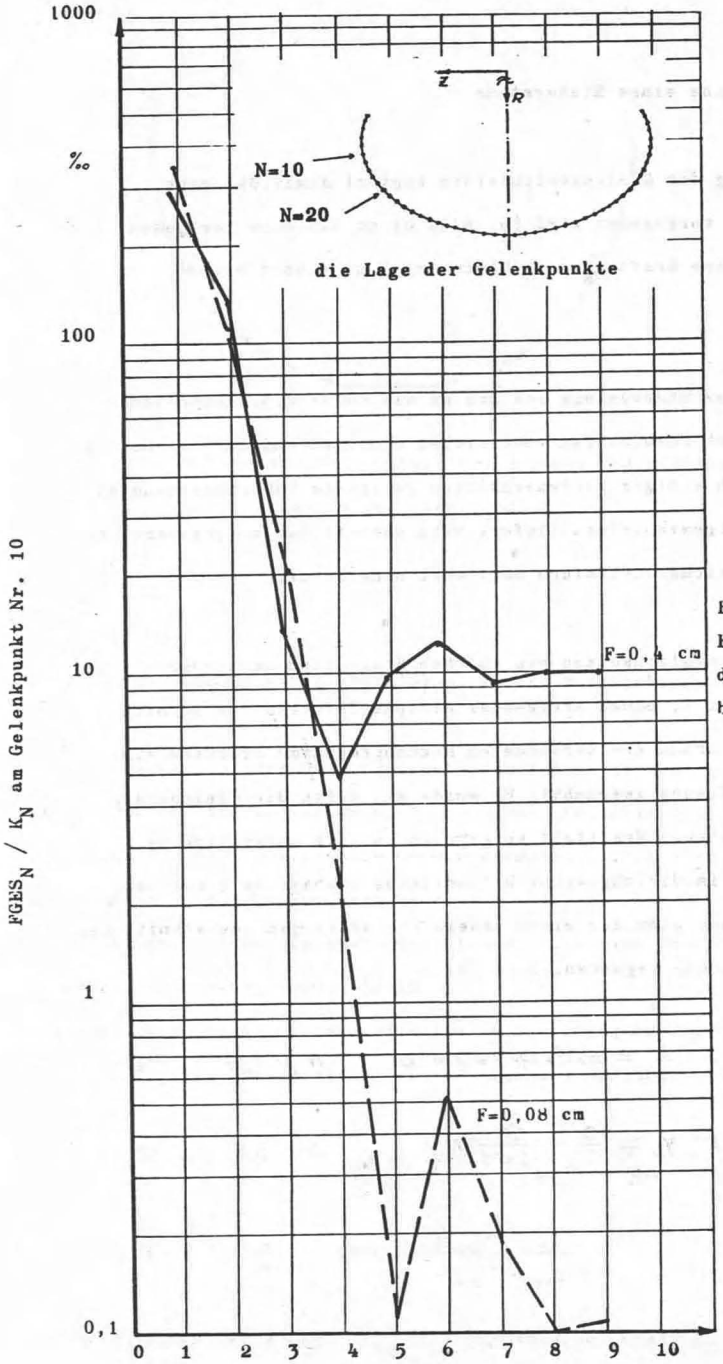


Bild 9:
$FGES_N/K_N$ als Funktion der Rechenschritte bei verschiedenem F

2.4.1.2. Vorgabe eines Stabsystems

Die Berechnung der Gleichgewichtsform beginnt damit, daß eine Stabgeometrie vorgegeben wird (s. Bild 6), so daß dann für jeden Gelenkpunkt eine Kraft $\vec{K}_N$ nach Gleichung 3 berechnet werden kann.

Die Vorgabe des Stabsystems ist nur an die unter 2.3. genannten Bedingungen gebunden. Es ist aber sicher einleuchtend, daß das Rechenverfahren nach weniger Rechenschritten geeignete Näherungslösungen für die Gleichgewichtsform liefert, wenn bereits das vorgegebene Stabsystem der Gleichgewichtsform möglichst nahe kommt.

Es gibt viele Möglichkeiten ein solches Stabsystem anzugeben. So könnte man z.B. einen kreis-oder ellipsenförmigen Querschnitt verwenden. Auf Grund des verwendeten Rechenprogramms erschien eine etwas andere Lösung zweckmäßig. Es wurde ein durch die Gleichungen (7,8) beschriebenes Kraftfeld vorgegeben und ein unter Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht befindliches Stabsystem berechnet. Mit diesem Stabsystem, das einen nahezu kreisförmigen Querschnitt hat, wurde die Rechnung begonnen. (Bild 10)

$$(7) \quad K_N = p * \delta * D/2 * 2 * LO \quad ; \quad N = 2, 4, \ldots, M-2$$

$$(8) \quad \varphi_N = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2*M} \cdot N \quad ; \quad N = 3, 5, \ldots, M-1$$

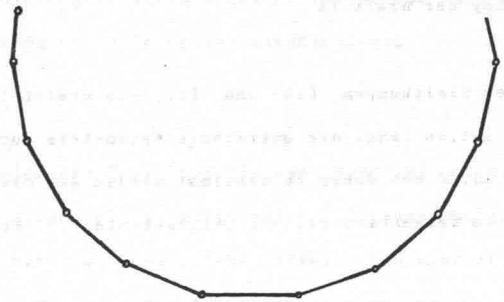


Bild 10: Querschnittsform des Stabsystems, mit dem die Rechnung begonnen wurde.

2.4.1.3. Berechnung eines Kraftfeldes $\vec{K}_N$ für das Stabsystem

Für die Berechnung der Gleichgewichtsform ist es notwendig, die Ersatzkräfte für den Luftdruck $\vec{K}_N$ zu berechnen (s. Bild 6).
Dies kann nur dann geschehen, wenn die Geometrie eines Stabsystems und damit auch die Koordinaten bekannt sind.
Am Anfang der Berechnung mußte aus diesem Grund eine Querschnittsgeometrie vorgegeben werden (Bild 6).
Setzt man die Querschnittskoordinaten in Gleichung (2) und (3) ein, so kann man für die Ersatzkräfte des Luftdrucks schreiben:

$$(10) \quad K_N = p \cdot \delta \cdot R_N \cdot \sqrt{(R_{N+1} - R_{N-1})^2 + (Z_{N+1} - Z_{N-1})^2} \; ; \quad N = 2, 4, \ldots, M-2$$

$$(11) \quad \varphi_{N+1} = ARCTAN \, \frac{R_{N+1} - R_{N-1}}{Z_{N-1} - Z_{N+1}}$$

Man beachte, daß der Winkel φ_{N+1} die Richtung der Kraft $\vec{K}_N$ angibt !

2.4.1.4. Bestimmung der Kraft ZA

Wenn mit Hilfe der Gleichungen (10) und (11) ein Kraftfeld $\vec{K}_N$ berechnet worden ist, so hängt die Querschnittsgeometrie nur noch von der Kraft ZA ab. ZA muß daher so bestimmt werden, daß die Breite des Querschnitts am Felgenrand mit der Felgenbreite B_F übereinstimmt.

ZA kann nur mit Hilfe eines Näherungsverfahrens berechnet werden, so daß exakt $Z_1 = B_F/2$ nicht erreichbar ist. Stattdessen muß ein Fehler F zugelassen werden, so daß nur $|Z_1 - B_F/2| < F$ erzielt werden kann. Dies ist jedoch ohne praktische Bedeutung, da F beleibig klein wählbar ist.

Die Berechnung der gesuchten Kraft ist mit Hilfe der Regula Falsi möglich. Bild 11 zeigt $Z_1 - B_F/2$ als Funktion von ZA. Im Schnittpunkt der Kurve mit der Abszisse liegt die gesuchte Kraft ZA.

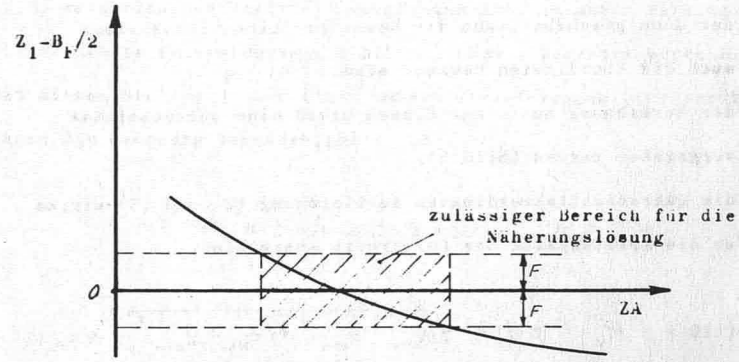


Bild 11: $Z_1 - B_F/2$ als Funktion von ZA

2.5. Die Gleichgewichtsform des Radialreifens ohne Umfangslagen mit Berücksichtigung von Korddehnungen

Der Vergleich des Programmlaufplans (Bild 12) mit dem unter 2.4.1.1. im Bild 6 dargestellten zeigt, daß zur Berücksichtigung von Korddehnungen nur eine zusätzliche Schleife hinzugefügt wurde, in der der Stablänge L_N ein neuer Wert zugewiesen wird.
Die Längenänderung ΔL_N läßt sich angeben, da die Seilkräfte SL_N bekannt sind:

$$\Delta L_N = \frac{SL_N}{a_1}$$

mit

$$(12) \qquad a_1 = E_{Stab} * F_{Stab} = E_{Kord} * n_{Kord} * F_{Kord}$$

Die Länge unter Wirkung von SL_N ergibt sich dann zu:

$$(13) \qquad L_N \Leftarrow L_N * \left(1 + \frac{SL_N}{a_1}\right) \qquad \text{für } N = 2,4,\ldots,M-2$$

Es läßt sich ein beliebig genaues Ergebnis erzielen, da das Rechenverfahren konvergiert, wie an Hand einiger Rechnungen festgestellt wurde.

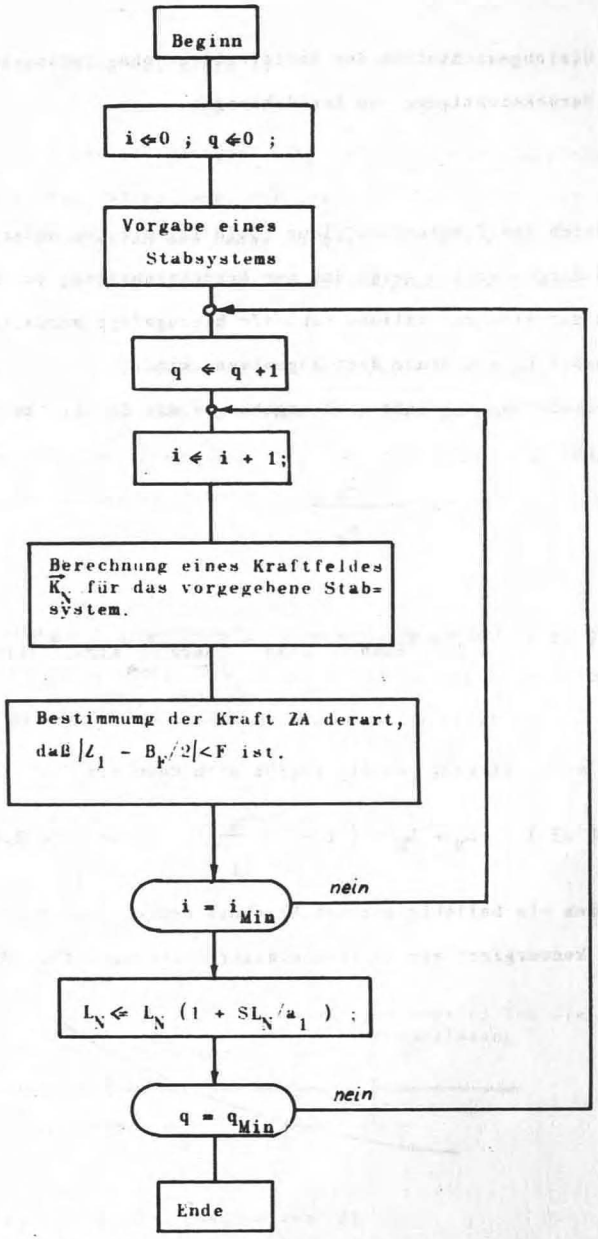


Bild 12:Programmlaufplan zur Berechnung der Gleichgewichts = form eines Radialreifens ohne Umfangslagen mit Berücksichtigung von Korddehnungen

3. Der unbelastete Gürtelreifen (Radlast = 0)

3.1. Mechanisches Ersatzmodell für einen Gürtelreifen

Bild 13 zeigt das Ersatzmodell für einen Gürtelreifen.
Der wesentliche Unterschied zu Kapitel 2 besteht nun darin,daß der Gürtel durch ein Stabsystem ersetzt wird.Die Stäbe des Gürtels verlaufen am unverformten Reifen exakt in Umfangsrichtung.Sie sind mit den übrigen Stäben ebenfalls gelenkig verbunden.

Der Verlauf der Gürtelstäbe in Umfangsrichtung entspricht einem Kronenwinkel von 0 Grad,was es bei ausgeführten Reifen nicht gibt. Um aber großen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen,wurde diese Anordnung der Gürtelst äbe gewählt.Am verformten Reifen ändert sich die Geometrie in der Aufstandsfläche derart,daß die Gürtelstäbe nicht mehr in Umfangsrichtung liegen.

3.2. Berechnung der Gleichgewichtsform des Gurtelreifens

Zum tieferem Verständnis zur Berechnung der Gleichgewichtsform ist die Kenntnis des Herstellungsvorganges von Gürtelreifen zweckmäßig.Der Rohreifen (Bild 14),der nur aus radialen Fäden (in Richtung der Zylinderachse) besteht,wird bombiert,bis der gewünschte Durchmesser fast erreicht ist (Bild 15).Nun wird der Gürtel aufgelegt und anschließend nachbombiert und vulkanisiert (Bild 16).
Der Gürtel ist die Begrenzung für die radialen Gewebebahnen,so daß er die Querschnittsform im Gürtelbereich durch seine Geometrie vorgibt.

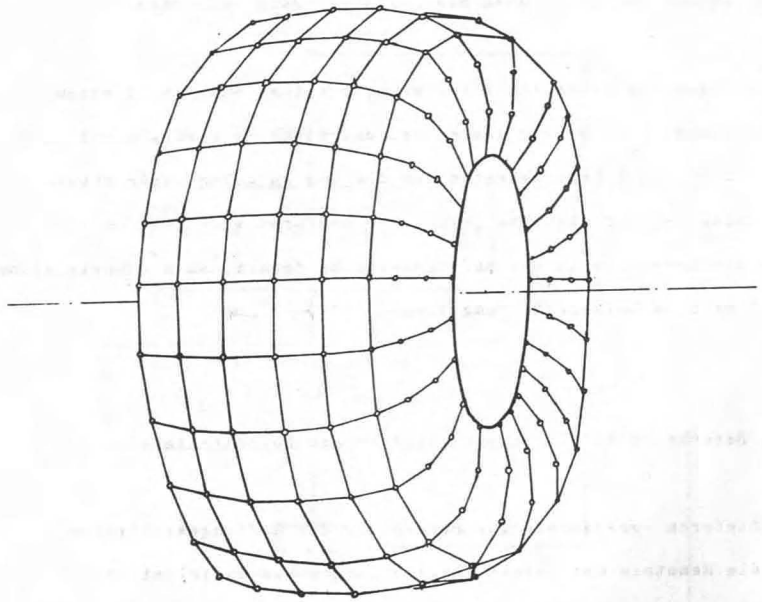


Bild 13: Ersatzmodell des Gürtelreifens ohne die die Lauffläche repräsentierenden Vertikalstäbe

Bild 14: Der Querschnitt des Rohreifens vor dem Bombieren

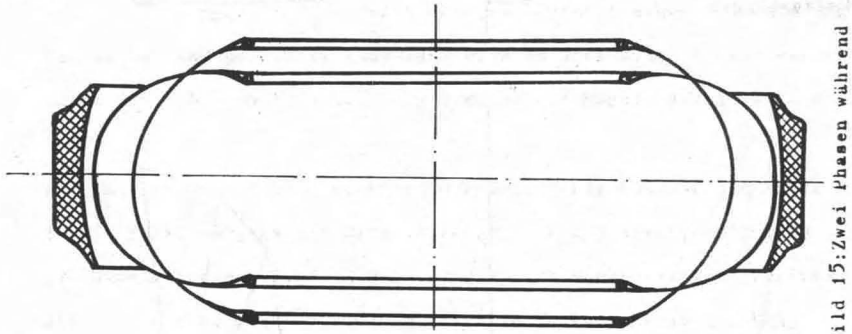


Bild 15: Zwei Phasen während des Bombierens

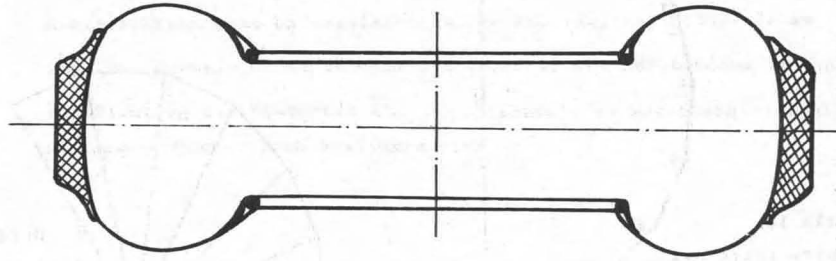


Bild 16: Der endgültige Reifenquerschnitt

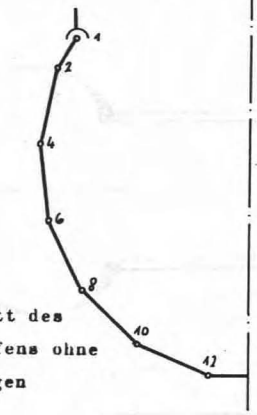


Bild 18:
Querschnitt des Radialreifens ohne Umfangslagen

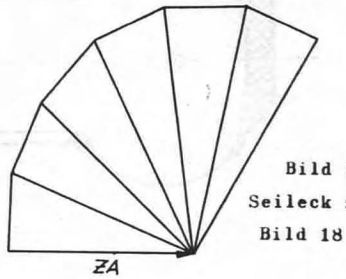


Bild 17:
Seileck zu Bild 18

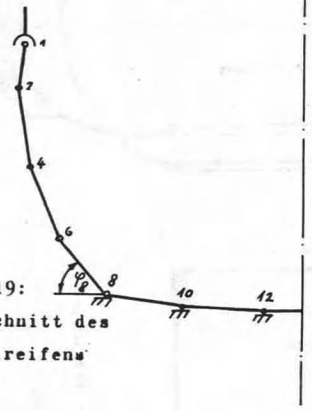


Bild 19:
Querschnitt des Gürtelreifens

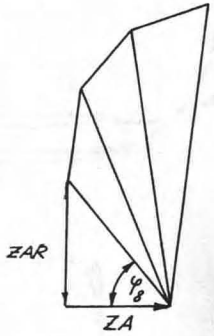


Bild 20: Seileck zu Bild 19

Die Geometrie des Querschnitts wird beim Radialreifen ohne Umfangslagen allein durch die Kraft ZA bestimmt (Bild 17 und 18). Beim Gürtelreifen wird die Geometrie der Seitenwand durch die Kräfte ZA und ZAR bestimmt. Die Geometrie des Querschnitts im Bereich des Gürtels ist durch die Umfangslagen bestimmt, die in Bild 19 durch dargestellt sind (Bild 19 und 20).

Bei der Berechnung der Gleichgewichtsform ist also nur die Geometrie der Seitenwand zu berechnen. Dies ist jedoch eine zusätzliche Schwierigkeit gegenüber der Berechnung der Gleichgewichtsform des Radialreifens ohne Umfangslagen, da die Richtung der Stabkraft am Ende des Gürtels nicht bekannt ist (Bild 17 und 18), sondern Betrag und Richtung der Stabkraft $\vec{SL}_{M-J}$ (Stabkraft an der Übergangsstelle Seitenwand Gürtel) zu bestimmen sind.

Es muß nun zusätzlich zu der Bedingung, daß $|Z_1 - B_F/2| < F$ ist, noch $D/2 < R_1 < D/2 + F_1$ erfüllt sein, was durch geeignete Bestimmung von ZA und ZAR geschehen kann. Dazu wird ZA auch hier - wie bereits unter 2.4.1.4. beschrieben - mit Hilfe der Regula Falsi ermittelt.

Auf ähnliche Weise wird auch bei der Berechnung von ZAR mit Hilfe der Regula Falsi vorgegangen. Bild 21 zeigt $R_1 - D/2$ als Funktion von ZAR. Die exakte Lösung liegt im Schnittpunkt der Kurve mit der Abszisse. Die zugelassene Näherungslösung liegt im schraffierten Bereich. Da Z_1 und R_1 von ZA und ZAR abhängen muß die Berechnung zweistufig vorgenommen werden, so wie es im Programmlaufplan (Bild 22) dargestellt ist.

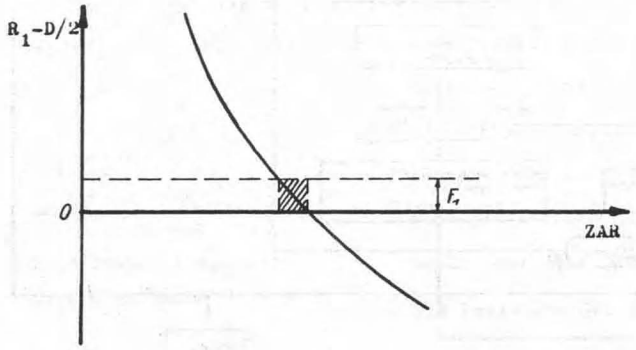


Bild 21: $R_1 - D/2$ als Funktion von ZAR

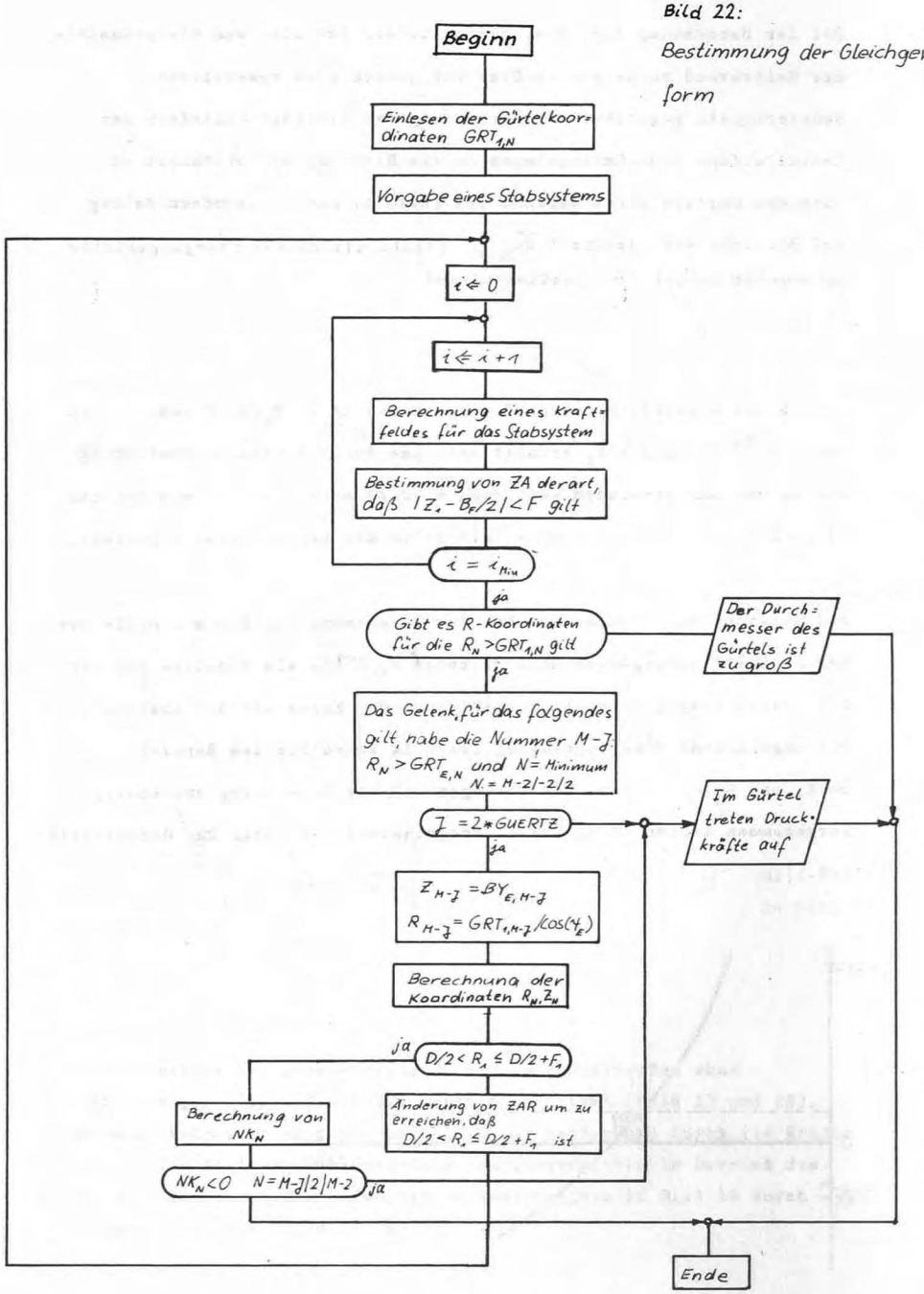


Bild 22: Bestimmung der Gleichgewichtsform

4. Der durch eine Vertikalkraft belastete Gürtelreifen

4.1. Der nicht rollende Reifen

4.1.1. Die Vorgänge im Reifen unmittelbar im Bereich über der Aufstandsfläche

4.1.1.1. Die Lage des Stabnetzes unmittelbar über der Aufstandsfläche

Es wird zunächst der nicht rollende Reifen betrachtet, da die Verhältnisse dann sehr viel leichter zu übersehen sind.
Die BY-BZ-Ebene und die BZ-BX-Ebene sind sicherlich Symmetrieebenen. Zweckmäßigerweise liege ein Radialstabsystem genau in der BY-BZ-Ebene (Bild 25a/b). Die Lage der Gelenkpunkte in dem BX-BY-BZ-System liegt für alle Gelenkpunkte eindeutig fest, sofern die Vertikalstäbe den Boden berühren.

Grundsätzlich wurde bei der Berechnung des durch eine Radlast belasteten Gürtelreifens die vertikale Einfederung des Reifens f vorgegeben, so daß die Größe der Aufstandsfläche dann auf folgende Weise berechnet werden kann. Die Begrenzung in BY-Richtung ist durch die Anzahl der Vertikalstäbe GUERTZ gegeben. In BX-Richtung endet das Stabnetz, wenn die halbe Sehnenlänge erreicht ist (Bild 24).
Damit ist bereits auf die Größe der Aufstandsfläche in Abhängigkeit von der Einfederung vorgegriffen worden, was unter 4.1.2.1. noch ausführlicher behandelt wird. Da alle Stäbe, die das Stabnetz über der Aufstandsfläche bilden, die Radial- und Gürtelstäbe, undehnbar sind, ist die Berechnung der Knoten- bzw Gelenkpunkte sehr einfach. Die Länge der Radialstäbe wurde unter 2.2. definiert.
Die Länge der Gürtelstäbe ergibt

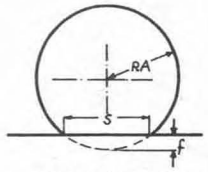


Bild 24: Die Länge der Aufstandsfläche

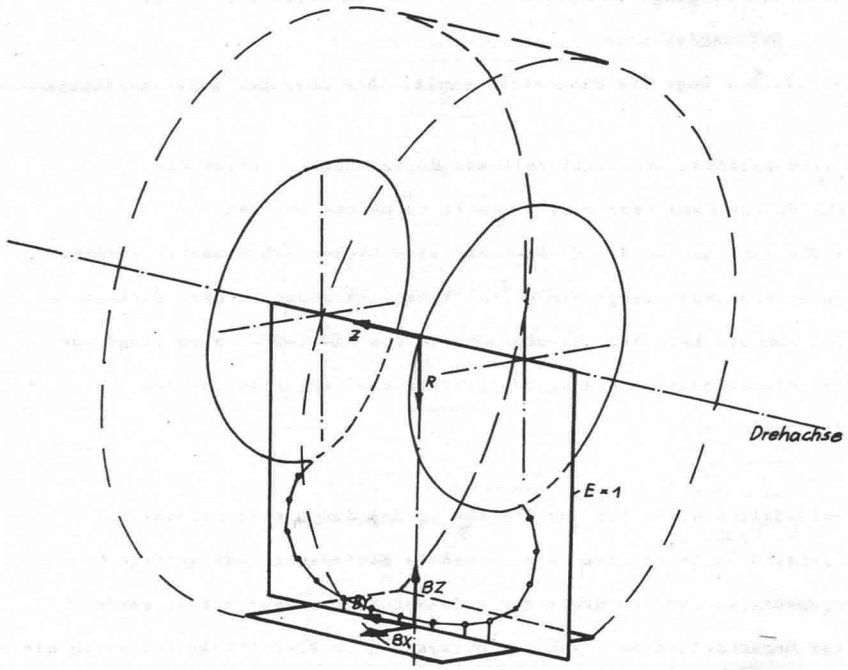


Bild 25a: Die Koordinatensysteme beim verformten Gürtelreifen. Das Z-R-System wird in jeder Radialebene neu definiert, Das BX-BY-BZ-System ist ortsfest.

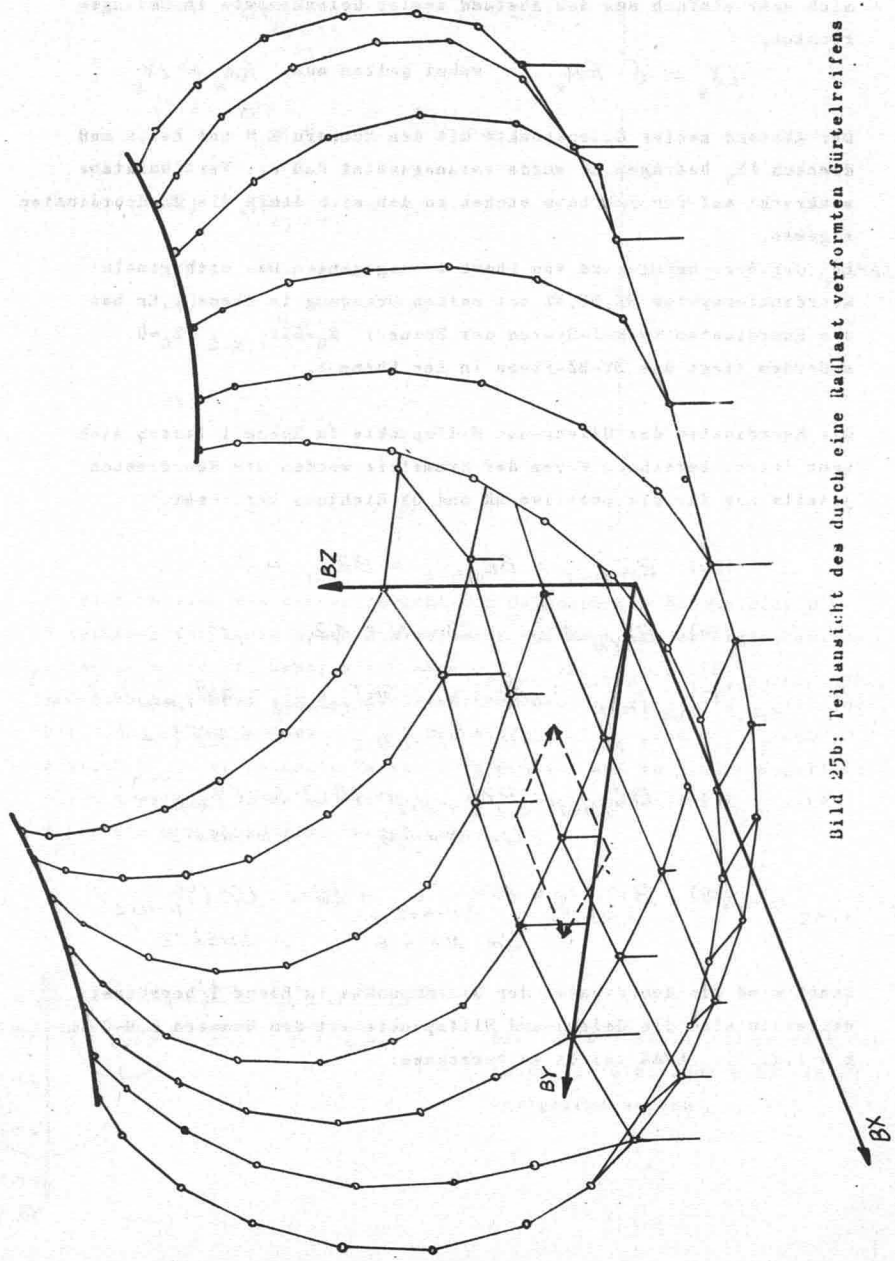


Bild 25b: Teilansicht des durch eine Radlast verformten Gürtelreifens

sich sehr einfach aus dem Abstand zweier Gelenkpunkte in Umfangsrichtung:

$$LX_N = \delta \cdot RA_N \qquad \text{wobei gelten muß: } RA_N \gg LX_N$$

Der Abstand zweier Gelenkpunkte mit den Nummern E,N und E+1,N muß demnach LX_N betragen. Es wurde vorausgesetzt, daß die Vertikalstäbe senkrecht auf der Fahrbahn stehen, so daß sich damit die BZ-Koordinaten ergeben.
Bei der Berechnung wird von Ebene 1 ausgegangen. Das orthogonale Koordinatensystem BX,BY,BZ hat seinen Ursprung in Ebene 1. Er hat die Koordinaten im R-Z-System der Ebene 1 $R_0 = GRT_{1,M-2}$; $Z_0 = 0$.
Außerdem liegt die BY-BZ-Ebene in der Ebene 1.

Die Koordinaten der Gelenk-und Hilfspunkte in Ebene 1 lassen sich sehr leicht berechnen. Wegen der Symmetrie werden die Koordinaten jeweils nur für die positive BX und BY-Richtung berechnet.

$$(15) \quad BZ_{1,M-2} = BZ_{1,M-1} = BZ_{1,M} = 0$$

$$(16) \quad BX_{1,N} = 0 \quad \text{für } N = 1,2,\ldots,M$$

$$(17) \quad \varphi_{M-N} = ARCSIN((GRT_{1,M-N-2} - GRT_{1,M-N})/L_{M-N})$$
$$\text{für } N = 2,4,\ldots,M-2\cdot GUERTZ-2$$

$$(18) \quad BZ_{1,M-N} = BZ_{1,M-N+2} + LO\cdot 2\cdot SIN(\varphi_{M-N+2})$$
$$\text{für } N = 4,6,\ldots,2\cdot GUERTZ$$

$$(19) \quad BY_{1,M-N} = BY_{1,M-N+2} + LO\cdot 2\cdot COS(\varphi_{M-N+2})$$
$$\text{für } N = 4,6,\ldots,2\cdot GUERTZ$$

Damit sind die Koordinaten der Gelenkpunkte in Ebene 1 berechnet. Weiterhin sind die Gelenk-und Hilfspunkte mit den Nummern E,M-2 für E = 1,2,.....,EMAX leicht zu berechnen:

$$\left.\begin{array}{ll}
(20) & BX_{E,M-1} = (E-1)\cdot LX_{M-1} \\
(21) & BX_{E,M-2} = BX_{E,M-1} \\
(22) & BY_{E,M-1} = 0 \\
(23) & BY_{E,M-2} = LO \\
(24) & BZ_{E,M-1} = 0 \\
(25) & BZ_{E,M-2} = 0
\end{array}\right\} \text{für } E = 2,3,\ldots,EMAX$$

In Bild 26 sind die bisher berechneten Gelenkpunkte dargestellt. Die Berechnung der Koordinaten der weiteren Gelenkpunkte erfolgt schrittweise. Es werden zunächst die Punkte $P_{2,M-4}$; $P_{2,M-6}$;....; $P_{2,M-2*GUERTZ-2}$ und dann beginnend mit der nächsten Ebenennummer $P_{3,M-4}$; $P_{3,M-6}$;... usw. Der Punkt $P_{2,M-4}$ hat von $P_{1,M-4}$ den Abstand LX_{M-4}, von $P_{2,M-2}$ den Abstand L_{M-2}. Der gesuchte Punkt liegt demnach auf folgender Kugelfläche. Diese Kugeloberfläche um den Punkt $P_{2,M-2}$ mit dem Radius L_{M-2} wird durch die Gleichung (26) beschrieben:

$$(26) \quad (BX - BX_{2,M-2})^2 + (BY - BY_{2,M-2})^2 + (BZ - BZ_{2,M-2})^2 = L_{M-2}^2$$

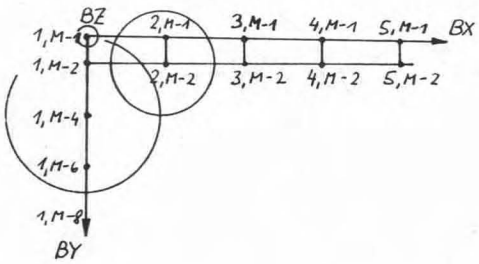


Bild 26: Die Stäbe und Gelenke, die durch die Gleichungen 15 bis 25 festgelegt werden

Da die Vertikalstablängen $VSL_{1,M-4}$ und $VSL_{2,M-4}$ gleich sind, ist auch $BZ_{1,M-4} = BZ_{2,M-4}$, so daß sich die Gleichung 26 wie folgt vereinfacht:

$$(27) \quad (BX - BX_{2,M-2})^2 + (BY - BY_{2,M-2})^2 = L_{M-2}^2 - (BZ_{1,M-4} - BZ_{2,M-2})^2$$

Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, der auf einer Parallelebene zur BX-BY-Ebene liegt und die Mittelpunktskoordinaten $BX_{MP} = BX_{2,M-2}$; $BY_{MP} = BY_{2,M-2}$ hat. Der Radius R beträgt:

$$R = \sqrt{L_{M-2}^2 - (BZ_{1,M-4} - BZ_{2,M-2})^2}$$

Eine weitere Bedingung für den Punkt $P_{2,M-4}$ besteht darin, daß der Abstand zum Punkt $P_{1,M-4}$ bedingt durch die Länge des Gürtelstabes LX_{M-4} betragen muß. Demnach liegt $P_{1,M-4}$ auf dem Kreis der durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$(28) \quad (BX - BX_{1,M-4})^2 + (BY - BY_{1,M-4})^2 = LX_{M-4}^2$$

Der gesuchte Punkt $P_{1,M-4}$ liegt im Schnittpunkt der beiden Kreise. Für einen beliebigen Punkt $P_{E,M-N}$ lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$(29) \quad (BX_{E,M-N} - BX_{E,M-N+2})^2 + (BY_{E,M-N} - BY_{E,M-N+2})^2 = R^2$$

$$(30) \quad (BX_{E,M-N} - BX_{E-1,M-N})^2 + (BY_{E,M-N} - BY_{E-1,M-N})^2 = LX_{M-N}^2$$

Für die Koordinaten des gesuchten Punktes erhält man:

$$(31a) \quad BX_{E,M-N} = \frac{1}{2 \cdot c_1}\left(-c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4 c_1 c_3}\right)$$

$$(31b) \quad BY_{E,M-N} = \frac{g - 2 \cdot h \cdot BX_{E,M-N}}{2 \cdot i}$$

mit:

$$h = BX_{E,M-N+2} - BX_{E-1,M-N}$$

$$i = BY_{E,M-N+2} - BY_{E-1,M-N}$$

$$g = BX_{E,M-N+2}^2 - BX_{E-1,M-N}^2 + BY_{E,M-N+2}^2 - BY_{E-1,M-N}^2 - R^2 + LX_{M-N}^2$$

$$c_1 = 1 + \frac{h^2}{i^2}$$

$$c_2 = \frac{2 \cdot h \cdot BY_{E,M-N+2}}{i} - \frac{h \cdot g}{i^2} - 2 \cdot BX_{E,M-N+2}$$

$$c_3 = BX_{E,M-N+2}^2 + \frac{g^2}{4 \cdot i^2} - \frac{g \cdot BY_{E,M-N+2}}{i} + BY_{E,M-N+2}^2 - R^2$$

4.1.1.2. Die Ersatzkräfte für den Luftdruck im Bereich unmittelbar über der Aufstandsfläche

Unter 2.1. wurden bereits die Kräfte infolge des Luftdrucks auf den unverformten Reifen berechnet. Die Definition der Ersatzkräfte an einem durch eine Vertikalkraft belasteten Reifen ist aber für die Gelenkpunkte, deren zugehörige Vertikalstäbe Bodenkontakt haben, nicht zweckmäßig. Für diese Gelenkpunkte bietet es sich stattdessen an, die bei der Abplattung des Reifens entstandene Form des Stabnetzes zu berücksichtigen. Die entsprechenden Koordinaten der Gelenk- und Hilfspunkte sind bereits unter 4.1.1.1. berechnet worden.

Es muß nun jedem Gelenkpunkt eine geeignete Umgebung zugeordnet werden, so daß dann mit Hilfe der eingeschlossenen Fläche und dem Druck p eine Ersatzkraft für den Luftdruck bestimmt werden kann. Am zweckmäßigsten erscheint es, eine viereckige Umgebung zu wählen, die durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ begrenzt wird. Wirkt auf die von den Vektoren eingespannte Fläche (Bild 27) der Druck p, so gilt für die Kraft auf die Fläche:

$$\vec{K} = p \cdot \left((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \frac{1}{2} + (\vec{d} \times \vec{c}) \cdot \frac{1}{2} \right)$$

Für die Wahl der Eckpunkte gibt es mehrere Möglichkeiten. Für den in Bild 28a dargestellten Fall, wo die Eckpunkte auf den Verbindungsstrecken der Radialstabmitten liegen, gelten die folgenden Gleichungen:

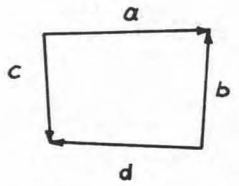


Bild 27: Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

Eckpunkt oben links (OL)

$$BXOL = (BX_{E-1,M-N+1} + BX_{E,M-N+1})/2$$
$$BYOL = (BY_{E-1,M-N+1} + BY_{E,M-N+1})/2$$
$$BZOL = (BZ_{E-1,M-N+1} + BY_{E,M-N+1})/2$$

Eckpunkt oben rechts (OR)

$$BXOR = (BX_{E+1,M-N+1} + BX_{E,M-N+1})/2$$
$$BYOR = (BY_{E+1,M-N+1} + BY_{E,M-N+1})/2$$
$$BZOR = (BZ_{E+1,M-N+1} + BZ_{E,M-N+1})/2$$

Eckpunkt unten links (UL)

$$BXUL = (BX_{E-1,M-N+1} + BX_{E,M-N-1})/2$$
$$BYUL = (BY_{E-1,M-N+1} + BY_{E,M-N-1})/2$$
$$BZUL = (BZ_{E-1,M-N+1} + BZ_{E,M-N-1})/2$$

Eckpunkt unten rechts (UR)

$$BXUR = (BX_{E+1,M-N-1} + BX_{E,M-N-1})/2$$
$$BYUR = (BY_{E+1,M-N-1} + BY_{E,M-N-1})/2$$
$$BZUR = (BZ_{E+1,M-N-1} + BZ_{E,M-N-1})/2$$

Durch diese Definition ist jedem Gelenkpunkt eine Umgebung zugeordnet, auf die der Innendruck wirkt. Für die im Bild (28) dargestellten Vektoren ergibt sich

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} BXOR - BXOL \\ BYOR - BYOL \\ BZOR - BZOL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} BXOR - BXUR \\ BYOR - BYUR \\ BZOR - BZUR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} BXUL - BXOL \\ BYUL - BYOL \\ BZUL - BZOL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} BXUL - BXUR \\ BYUL - BYUR \\ BZUL - BZUR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Für das Kreuzprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot 0{,}5$ ergibt sich dann:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

und für $(\vec{d} \times \vec{c}) \cdot 0{,}5$

$$(\vec{d} \times \vec{c}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_3 d_2 - c_2 d_3 \\ c_1 d_3 - c_3 d_1 \\ c_2 d_1 - c_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Die Kraft $\overrightarrow{DK}_N$ ergibt sich dann aus der Summe der Kreuzprodukte multipliziert mit p:

$$\overrightarrow{DK}_N = \begin{pmatrix} DRUX \\ DRUY \\ DRUZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \frac{1}{2}(c_3 d_2 - c_2 d_3) \\ \frac{1}{2}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \frac{1}{2}(c_1 d_3 - c_3 d_1) \\ \frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1) + \frac{1}{2}(c_2 d_1 - c_1 d_2) \end{pmatrix} \cdot p$$

Für den Betrag von $\overrightarrow{DK}_N$ erhält man:

$$DK_N = \sqrt{DRUX^2 + DRUY^2 + DRUZ^2}$$

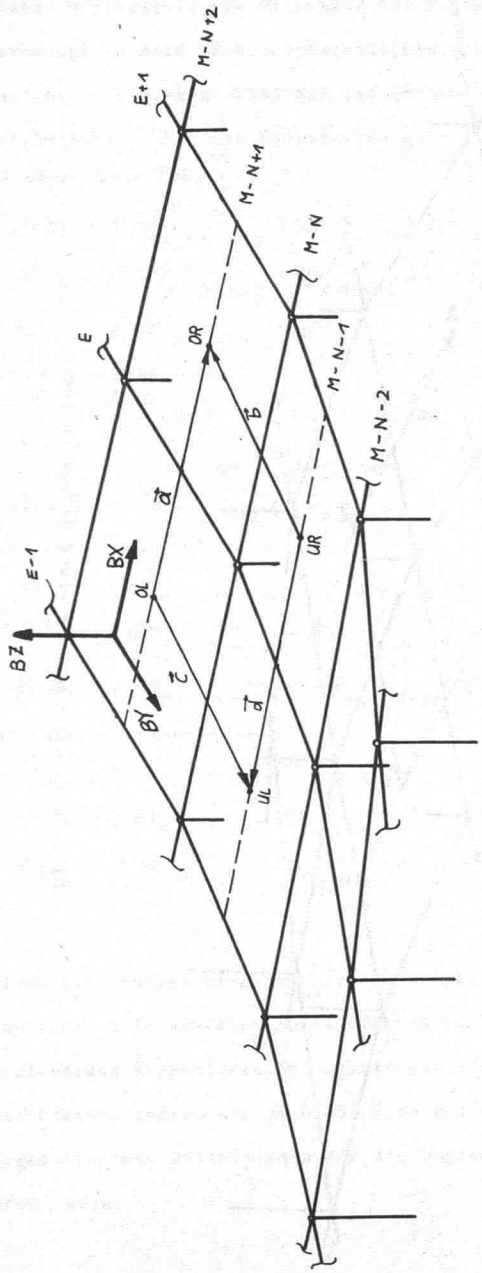


Bild 28a: Die Umgebung eines Gelenkpunktes

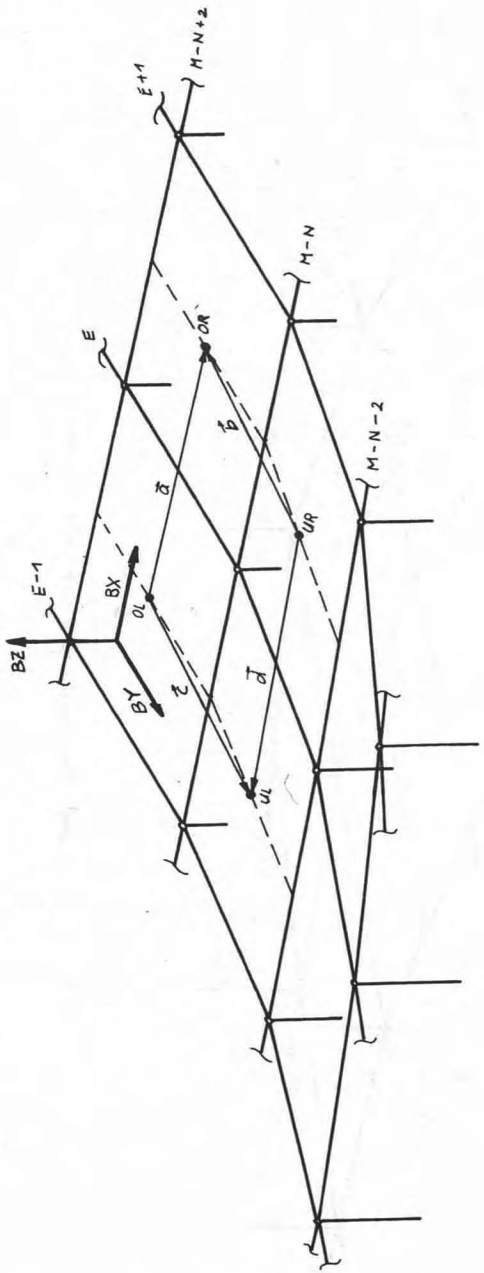


Bild 28 b: Die Umgebung eines Gelenkpunktes

Eine andere Möglichkeit die Eckpunkte des Flächenelements zu definieren ist in Bild 28 b dargestellt. Die Eckpunkte des Flächenelements liegen hierbei auf den Verbindungslinien der Gürtelstabmitten. Für die Koordinaten gilt dann:

Eckpunkt oben links (OL) :

$$BXOL = ((BX_{E-1,M-N+2} + BX_{E,M-N+2})/2 + (BX_{E-1,M-N} + BX_{E,M-N})/2)/2$$

$$BYOL = ((BY_{E-1,M-N+2} + BY_{E,M-N+2})/2 + (BY_{E-1,M-N} + BY_{E,M-N})/2)/2$$

$$BZOL = ((BZ_{E-1,M-N+2} + BZ_{E,M-N+2})/2 + (BZ_{E-1,M-N} + BZ_{E,M-N})/2)/2$$

Eckpunkt oben rechts (OR) :

$$BXOR = ((BX_{E,M-N+2} + BX_{E+1,M-N+2})/2 + (BX_{E,M-N} + BX_{E+1,M-N})/2)/2$$

$$BYOR = ((BY_{E,M-N+2} + BY_{E+1,M-N+2})/2 + (BY_{E,M-N} + BY_{E+1,M-N})/2)/2$$

$$BZOR = ((BZ_{E,M-N+2} + BZ_{E+1,M-N+2})/2 + (BZ_{E,M-N} + BY_{E+1,M-N})/2)/2$$

Eckpunkt unten links (UL) :

$$BXUL = ((BX_{E-1,M-N-2} + BX_{E,M-N-2})/2 + (BX_{E-1,M-N} + BX_{E,M-N})/2)/2$$

$$BYUL = ((BY_{E-1,M-N+2} + BY_{E,M-N-2})/2 + (BY_{E-1,M-N} + BY_{E,M-N})/2)/2$$

$$BZUL = ((BZ_{E-1,M-N+2} + BZ_{E,M-N-2})/2 + (BZ_{E-1,M-N} + BZ_{E,M-N})/2)/2$$

Eckpunkt unten rechts (UR) :

$$BXUR = ((BX_{E+1,M-N} + BX_{E,M-N})/2 + (BX_{E+1,M-N-2} + BX_{E,M-N-2})/2)/2$$

$$BYUR = ((BY_{E+1,M-N} + BY_{E,M-N})/2 + (BY_{E+1,M-N-2} + BY_{E,M-N-2})/2)/2$$

$$BZUR = ((BZ_{E+1,M-N} + BZ_{E,M-N})/2 + (BZ_{E+1,M-N-2} + BZ_{E,M-N-2})/2)/2$$

Die beiden hier vorgeschlagenen gleichwertigen Möglichkeiten eine Umgebung eines Gelenkpunktes zu definieren (Bild 28a und b) führen zu verschiedenen Ergebnissen. Im ungünstigsten Fall unterscheiden sich die Flächen jedoch nur um 0,005 %, so daß es belanglos ist, welche der vorgeschlagenen Definitionen für die Umgebung der Gelenkpunkte verwendet wird.

4.1.2. Die Querschnittsform des verformten Gürtelreifens

Bei dem nicht verformten Reifen (Radlast =0) liegen alle Radialstäbe in den Z-R-Ebenen. Wird der Reifen durch eine Radlast verformt, so wandern die Radialstäbe im Gürtelbereich aus den Z-R-Ebenen aus und bilden zusammen mit den Gürtelstäben das unter 4.1.1.1. berechnete Stabnetz. Nur für den Sonderfall, daß der Gürtelquerschnitt nicht gekrümmt ist, liegen beim verformten Reifen auch die Radialstäbe im Gürtelbereich in den entsprechenden Z-R-Ebenen.

Die Berechnung der Querschnittsform erfolgt in zwei Schritten:

1. Berechnung der Geometrie der Radialstäbe im Gürtelbereich
2. Berechnung der Form der Seitenwand

Die Koordinaten der Gelenkpunkte im Gürtelbereich sind bereits unter 4.1.1.1. berechnet worden und im BX-BY-BZ-System angegeben.
Die Berechnung der Seitenwand erfolgt jedoch im Z-R-System, so daß eine Umrechnung erfolgen muß. Der Gelenkpunkt mit der Nummer E,M-J, der den seitlichen Rand der Aufstandsfläche und auch den Beginn der Seitenwand darstellt (Bild 29), muß in der Z-R-Ebene liegen. Für diesen Punkt gilt die Beziehung zwischen den Koordinaten:

$$R_{M-J} = GRT_{1,M-J} / \cos(\psi_E) \quad ; \quad Z_{M-J} = BY_{E,M-J}$$

Wenn R_{M-J}, Z_{M-J} und das Kraftfeld $\vec{K}_N$ bekannt sind, liegt die Geometrie der Seitenwand fest. Für die Winkel $\varphi_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_{M-J}$ gilt:

Wenn

$$ZA > |\vec{K}_{Z_{M-J}} + \vec{K}_{Z_{M-J-2}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-J-N}}|$$

dann gilt:

$$\varphi_{M-J-N} = \quad ARCTAN \; \frac{ZAR + |\vec{K}_{R_{M-J}} + \vec{K}_{R_{M-J-2}} + \ldots + \vec{K}_{R_{M-J-N}}|}{ZA - |\vec{K}_{Z_{M-J}} + \vec{K}_{Z_{M-J-2}} + \ldots + \vec{K}_{Z_{M-J-N}}|}$$

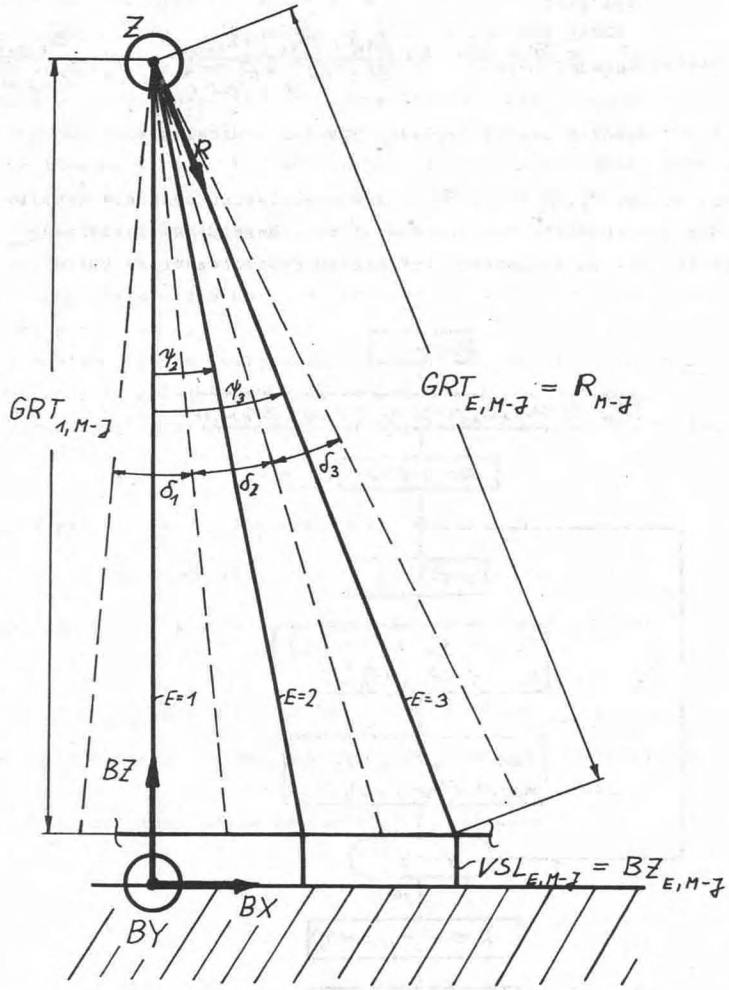


Bild 29: Seitenansicht der Ebenen 1,2,3, des verformten Ersatzmodells

Wenn

$$ZA < |\vec{K}_{z_{M-J}} + \vec{K}_{z_{M-J-2}} + \ldots\ldots + \vec{K}_{z_{M-J-N}}|$$

dann gilt:

$$\varphi_{M-J-N} = \pi + ARCTAN \frac{ZAR + |\vec{K}_{R_{M-J}} + \vec{K}_{R_{M-J-2}} + \ldots\ldots + \vec{K}_{R_{M-J-N}}|}{ZA - |\vec{K}_{z_{M-J}} + \vec{K}_{z_{M-J-2}} + \ldots\ldots + \vec{K}_{z_{M-J-N}}|}$$

wobei N die Werte 0,2,...,M-J-2 durchläuft.

Wenn die Winkel $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{M-J}$ vorliegen, lassen sich die Koordinaten der Gelenkpunkte der Seitenwand berechnen. Diese Berechnung erfolgt auf die im Programmablaufplan dargestellte Weise (Bild 30)

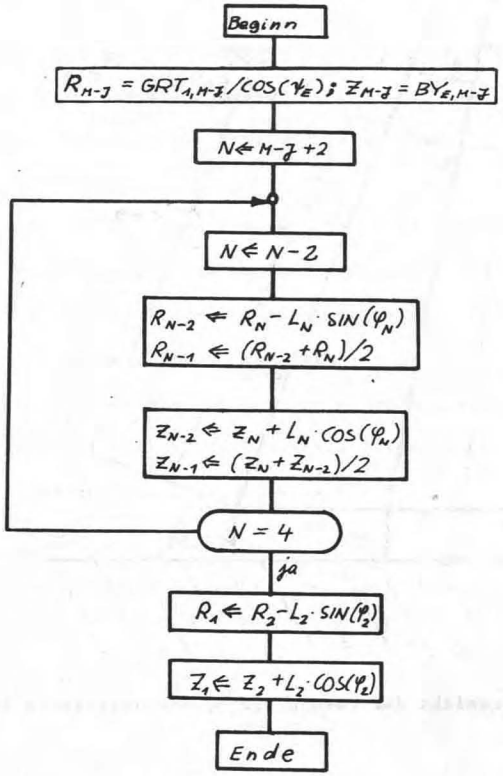


Bild 30: Programmlaufplan zur Berechnung der Koordinaten R_N und Z_N

Wenn die Koordinaten der Seitenwand R_N, Z_N vorliegen, ist zu prüfen, ob die Seitenwand auch den gewünschten Endpunkt, den Felgenrand, erreicht hat, also ob $D/2 \leq R_1 \leq D/2 + F_1$ und $Z_1 = B_F/2 \pm F$. Trifft dies nicht zu, so werden die Kräfte ZA und ZAR gemäß Bild 21, 22 und 11 so lange variiert, bis Z_1 im gewünschten Intervall liegt. Die einzige wesentliche Änderung bei der Berechnung des verformten Reifens gegenüber der Berechnung der Gleichgewichtsform des unverformten Reifens besteht darin, daß jeweils für jede Ebenennummer, deren Vertikalstäbe Bodenkontakt haben, die Koordinaten R_{M-J}, Z_{M-J} im voraus berechnet werden müssen, so daß dann nach dem gleichen Verfahren, wie auch die Gleichgewichtsform berechnet wurde, die Querschnittsform des Gürtelreifens in den einzelnen Z-R-Ebenen berechnet werden kann.

Bei der Verformung des Reifens ändert sich der Winkel zwischen 2 aufeinanderfolgenden Z-R-Ebenen, so daß δ_E nicht mehr wie beim unverformten Reifen konstant ist. Für δ_E gilt beim verformten Reifen:

$$\delta_E = 2 \cdot (\psi_E - \psi_{E-1}) - \delta_{E-1}$$

Als Anfangswert für die Ebene 1 gilt: (s. Bild 29)

$$\delta_1 = Arctan\,(LX_{M-J} / GRT_{1,M-J})$$

Die Lage der Ebenen relativ zur Ebene 1 wird durch die Winkel definiert, für die gilt:

$$\psi_E = Arctan\,(LX_{M-J} \cdot (E-1) / GRT_{1,M-J})$$

Die Berechnung der Querschnittsform in den Ebenen beginnt in der Ebene 1, danach wird in Ebene 2,3,4,...,EMAX weitergerechnet. Der Programmlaufplan hierzu ist in Bild 31 dargestellt.

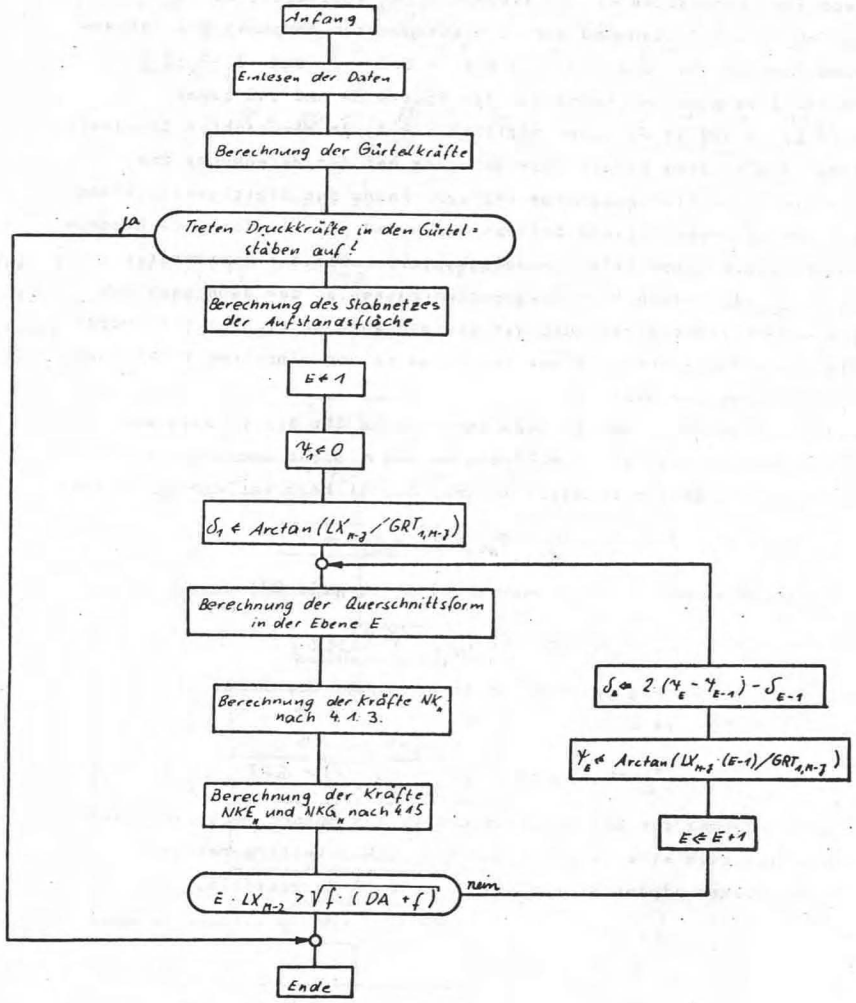


Bild 31: Programmlaufplan zur Berechnung des verformten Gürtelreifens

4.1.2.1. Die Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt

Es wurde bisher beim nicht belasteten Reifen vorausgesetzt, daß keine Druckbelastung der Gürtelstäbe auftritt.
Um festzustellen, ob dies wirklich zutrifft, wird die Wirkung des Gürtels durch die Kräfte $\overrightarrow{KR}_N$ (s. Bild 32) ersetzt, so daß die ursprünglich vorhandene Querschnittsgeometrie auch ohne Gürtel erhalten bleibt.
Wenn die Kräfte $\overrightarrow{KR}_N$ in negativer R-Richtung wirken, wie dies in Bild 32 angegeben wurde, so läßt sich schließen, daß der Gürtel unter Zugbelastung stehen wird.

Wenn nun das Reifenmodell mit einer Radlast belastet wird, so werden die Einfederung und die Form der Aufstandsfläche von dieser Radlast abhängen. Wichtig für die Berechnung des verformten Gürtelreifens ist es, Aussagen über Größe und Form der Aufstandsfläche machen zu können.
Wenn die äußere Laufflächenbegrenzung bzw die äußere Begrenzung der Vertikalstäbe des Querschnitts eine Gerade ist (Bild 33a), so ist zu erwarten, daß die Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt für alle Ebenennummern gleich ist. Ist jedoch die äußere Begrenzung der Vertikalstäbe des Querschnitts gekrümmt (Bild 33b), so ist es denkbar, daß sich die Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt mit der Ebenennummer ändert.

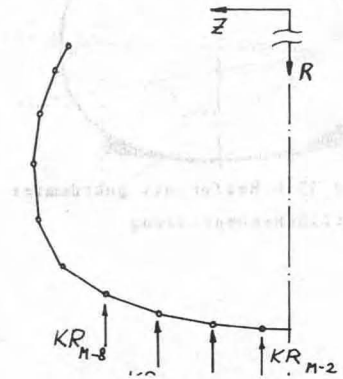


Bild 32: Querschnittsform des unverformten Gürtelreifens, wobei der Gürtel durch die Wirkung der Kräfte $\overrightarrow{KR}_N$ ersetzt wurde.

Es wurden eine große Zahl von Reifenberechnungen durchgeführt,doch in allen Fällen war die Anzahl der Vertikalstäbe mit Bodenkontakt für alle Ebenennummern gleich,so daß die Aufstandsfläche nahezu rechteckig ist.

Es wurde versucht auch die Länge der Aufstandsfläche über das Kräftegleichgewicht in den Gürtelstäben am Rand der Aufstandsfläche zu berechnen,was jedoch an der Kompliziertheit des Problems scheiterte. Die Schwierigkeit liegt darin,daß am Ein-und Auslauf der Aufstandsfläche die Kräfte im Gürtel und die Form des Gürtels außerhalb der Aufstandsfläche mit in die Berechnung eingehen müssen.

Da eine exakte Berechnung der Länge der Aufstandsfläche nicht möglich war,wurde stattdessen die Länge der Kreissehne s (Bild 24) als Näherung verwendet. s ist abhängig vom Radius RA und der Einfederung f.
Für s gilt:

$$s = 2 \cdot f \cdot \sqrt{2 \cdot RA - f}$$

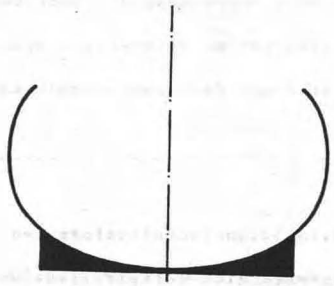


Bild 33a: Reifen mit ebener Laufflächenbegrenzung

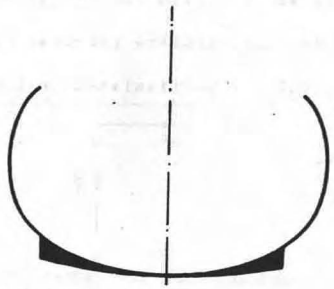


Bild 33 b:Reifen mit gekrümmter Laufflächenbegrenzung

4.1.3. Die Normaldruckverteilung des Gürtelreifens ohne Berücksichtigung des Einflußes von Biegesteifigkeiten

Es ist schon vielfach versucht worden,die Ursache des Verlaufs der Bodendruckverteilung zu erklären.Unter anderem interessierte dabei, welchen Einfluß die Biegesteifigkeiten von Seitenwände und Gürtel auf die Bodendruckverteilung haben.Es soll hier zunächst die Bodendruckverteilung ohne Berücksichtigung von Biegesteifigkeiten bestimmt werden.Der Einfluß der Biegesteifigkeiten wird später unabhängig hiervon untersucht werden.Die gesamte Bodendruckverteilung läßt sich dann als Summe der einzelnen Druckverteilungen angeben.

Um die Wirkung des Luftdruckes beim Ersatzmodell darstellen zu können,wurden die Kräfte $\vec{K}_N$ definiert.An jedem Gelenkpunkt im Bereich der Aufstandsfläche wirken diese Kraft $\vec{K}_N$,die Stabkräfte $\overrightarrow{SLG}_N$ und $\overrightarrow{SLG}_{N+2}$,die Kräfte in den Gürtelstäben $\overrightarrow{GK1}_N$ und $\overrightarrow{GK2}_N$, die Normalkraft $\overrightarrow{NK}_N$,die als Reaktionskraft der Fahrbahn auf das Gelenk wirkt (Bild 34).Das Feld $\overrightarrow{NK}_N$ stellt demnach die Normalkraftverteilung dar,die ihre Ursache im Luftdruck und in der geometrischen Form des Reifenquerschnittes hat.

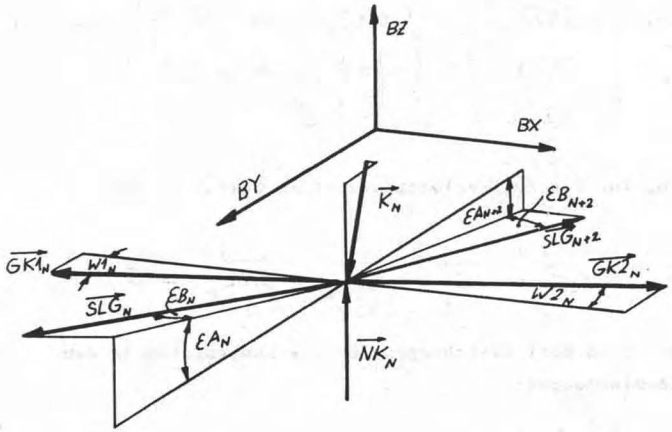


Bild 34:Die an einem Gelenkpunkt der Aufstadsfläche angreifenden Kräfte.

Die Kräfte haben die Komponenten:

$$\overrightarrow{SLG_N} = \begin{pmatrix} -SLGX_N \\ SLGY_N \\ SLGZ_N \end{pmatrix} ; \quad \vec{K}_N = \begin{pmatrix} DRUX_N \\ DRUY_N \\ DRUZ_N \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SLG_{N+2}} = \begin{pmatrix} SLGX_{N+2} \\ -SLGY_{N+2} \\ -SLGZ_{N+2} \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{NK_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ NK_N \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GK1_N} = \begin{pmatrix} -GK1X_N \\ GK1Y_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -GK1_N \cdot COS(W1_N) \\ GK1_N \cdot SIN(W1_N) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GK2_N} = \begin{pmatrix} GK2X_N \\ -GK2Y_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GK2_N \cdot COS(W2_N) \\ -GK2_N \cdot SIN(W2_N) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Bedingung für das Kräftegleichgewicht am Gelenk ist zu fordern:

$$\vec{K}_N + \overrightarrow{NK_N} + \overrightarrow{SLG_N} + \overrightarrow{SLG_{N+2}} + \overrightarrow{GK1_N} + \overrightarrow{GK2_N} = 0$$

Damit ergeben sich drei Gleichungen für die Komponenten in den BX,BY und BZ-Richtungen:

$$(32)\ DRUX_N - SLGX_N + SLGX_{N+2} - GK1X_N + GK2X_N = 0$$

$$(33)\ DRUY_N + SLGY_N - SLGY_{N+2} + GK1Y_N - GK2Y_N = 0$$

$$(34)\ DRUZ_N + NK_N + SLGZ_N - SLGZ_{N+2} = 0$$

Zwischen den Beträgen $SLGX_N$, $SLGY_N$, $SLGZ_N$, und SLG_N besteht folgender Zusammenhang:

$$SLGZ_N = SLGY_N \cdot TAN(\varepsilon A_N)$$

$$SLGX_N = SLGY_N \cdot TAN(\varepsilon B_N)$$

$$SLG_N = SLGY_N \cdot \sqrt{1 + TAN^2(\varepsilon A_N) + TAN^2(\varepsilon B_N)}$$

$$SLG_{N+2} = SLGY_{N+2} \cdot \sqrt{1 + TAN^2(\varepsilon A_{N+2}) + TAN^2(\varepsilon B_{N+2})}$$

mit

$$\varepsilon A_N = ARCTAN\left(\frac{BZ_{N-2,E} - BZ_{N,E}}{BY_{N-2,E} - BY_{N,E}}\right)$$

$$\varepsilon A_{N+2} = ARCTAN\left(\frac{BZ_{N,E} - BZ_{N+2,E}}{BY_{N,E} - BY_{N+2,E}}\right)$$

und

$$\varepsilon B_N = ARCTAN\left(\frac{BX_{N,E} - BX_{N-2,E}}{BY_{N-2,E} - BY_{N,E}}\right)$$

$$\varepsilon B_{N+2} = ARCTAN\left(\frac{BX_{N+2,E} - BX_{N,E}}{BY_{N,E} - BY_{N+2,E}}\right)$$

Damit kann man für $\overrightarrow{SLG_N}$ und $\overrightarrow{SLG_{N+2}}$ auch schreiben:

$$\overrightarrow{SLG_N} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} \cdot SLG_N \cdot TAN(\varepsilon B_N) \\ \frac{1}{C_1} \cdot SLG_N \\ \frac{1}{C_1} \cdot SLG_N \cdot TAN(\varepsilon A_N) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SLG}_{N+2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_2} \cdot SLG_{N+2} \cdot TAN(\varepsilon B_{N+2}) \\ \frac{1}{C_2} \cdot SLG_{N+2} \\ \frac{1}{C_2} \cdot SLG_{N+2} \cdot TAN(\varepsilon A_{N+2}) \end{pmatrix}$$

Für c_1 und c_2 gilt:

$$C_1 = \sqrt{1 + TAN^2(\varepsilon A_N) + TAN^2(\varepsilon B_N)}$$

$$C_2 = \sqrt{1 + TAN^2(\varepsilon A_{N+2}) + TAN^2(\varepsilon B_{N+2})}$$

Die Winkel W1 und W2 sind durch die Geometrie des Stabnetzes der Aufstandsfläche festgelegt und können folgendermaßen berechnet werden:

$$W1_N = ARCSIN \frac{BY_{E-1,N} - BY_{E,N}}{LX_N}$$

$$W2_N = ARCSIN \frac{BY_{E,N} - BY_{E+1,N}}{LX_N}$$

Die Gleichungen (32), (33) und (34) ergeben dann durch entsprechendes Einsetzen folgendes Gleichungssystem:

$$(35)\ DRUX_N - \frac{1}{C_1} \cdot SLG_N \cdot TAN(\varepsilon B_N) + \frac{1}{C_2} \cdot SLG_{N+2} \cdot TAN(\varepsilon B_{N+2}) - GK1_N \cdot COS(W1_N) + GK2_N \cdot (COS(W2_N)) = 0$$

$$(36)\ DRUY_N + SLG_N \cdot \frac{1}{C_1} - SLG_{N+2} \cdot \frac{1}{C_2} + GK1_N \cdot SIN(W1_N) - GK2_N \cdot SIN(W2_N) = 0$$

$$(37)\ DRUZ_N + NK_N + SLG_N \cdot \frac{1}{C_1} \cdot TAN(\varepsilon A_N) - \frac{1}{C_2} \cdot SLG_{N+2} \cdot TAN(\varepsilon A_{N+2}) = 0$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems ist dann möglich, wenn sin(W1) und sin(W2) näherungsweise gleich Null gesetzt werden. Die Winkel W1 und W2 sind sehr klein, so daß dies zulässig ist. Physikalisch bedeutet dies, daß der Einfluß der Kräfte in den Gürtelstäben auf die Normalkraftverteilung vernachlässigt wird. Auf die Bedeutung dieser Gürtelkräfte insbesondere beim rollenden Reifen wird später noch eingegangen werden.
Aus Gleichung (36) und (37) erhält man dann für NK_N:

$$(38)\ NK_N = -DRUZ_N - SLG_N \cdot (TAN(\varepsilon A_N) - TAN(\varepsilon A_{N+2})) \cdot \frac{1}{C_1} + DRUY_N \cdot TAN(\varepsilon A_{N+2})$$

Für SLG_{N+2} wurde dabei wegen der Näherung $sin(W1) \approx 0$ und $sin(W2) \approx 0$ folgender Ausdruck eingesetzt:

$$(39)\ SLG_{N+2} = C_2 \cdot (DRUY_N + SLG_N \cdot \frac{1}{C_1})$$

Zur Berechnung von $\overrightarrow{NK}_N$ wird am Gelenk mit der Nummer M-J begonnen. Dort gilt folgende Randbedingung:

$$\overrightarrow{SLG}_{M-J} = \begin{pmatrix} -ZAR \cdot SIN(\psi_E) \\ ZA \\ ZAR \cdot COS(\psi_E) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon A_{M-J} = ARCTAN(ZAR \cdot COS(\psi_E) / ZA)$$

$$\varepsilon B_{M-J} = ARCTAN(ZAR \cdot SIN(\psi_E) / ZA)$$

Dann kann nach Gleichung (39) SLG_{M-J+2} berechnet werden, so daß damit die Berechnung von $\overrightarrow{NK}_N$ am Gelenk M-J+2 erfolgen kann. So wird schrittweise $\overrightarrow{NK}_N$ für alle Gelenkpunkte bis einschließlich $\overrightarrow{NK}_{M-2}$ berechnet.

4.1.4. Die Kräfte in den Gürtelstäben beim unbelasteten Reifen.

Ist der Reifen nicht durch eine Radlast belastet, so sind die Kräfte in den Gürtelstäben auf einfache Weise zu berechnen. Bild 35a zeigt das Ersatzmodell des unverformten Reifens. Die Kräfte infolge des Luftdruckes werden jetzt im Gürtelbereich nicht mehr von der Fahrbahn aufgen ommen sondern von den Gürtelstäben. Damit Kräftegleichgewicht herrscht, müssen auch jetzt die gleichen Bedingungen wie unter 4.1.3. erfüllt werden. Es muß in R-Richtung an den Gelenkpunkten im Bereich des Gürtels je eine Kraft NK_N wirken. Dies geschieht hier, indem die Gürtelkräfte GK_N so groß sein müssen, daß ihre Komponenten in R-Richtung jeweils $NK_N/2$ betragen (Bild 35 b).

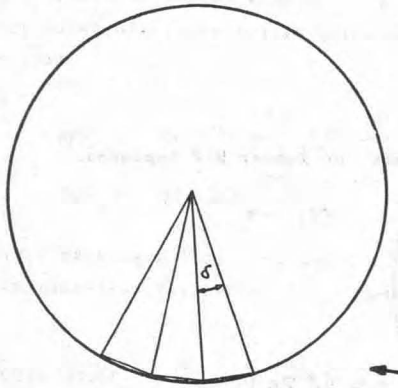


Bild 35a: Seitenansicht des Ersatzmodells

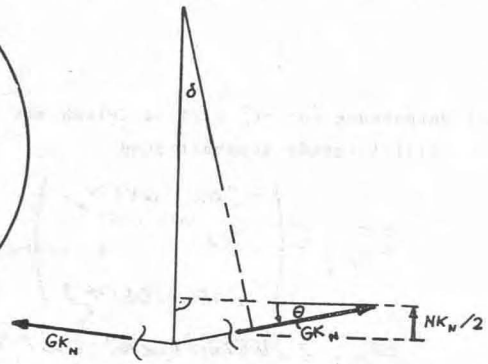


Bild 35B: Die Schnittkräfte an den Gürtelstäben

Damit dies erfüllt ist, muß für GK_N gelten:

$$GK_N = NK_N / (2 \cdot \sin(\theta))$$

mit

$$\theta = \delta/2$$

4.1.5. Der Einfluß der Biegesteifigkeiten auf die Normaldruckverteilung

Die Biegesteifigkeiten der Seitenwand des Reifens und insbesondere die des Gürtels haben einen großen Einfluß auf die Normalkraftverteilung wie an Hand von Messungen und auch Modellversuchen nachgewiesen wurde [2,3,5,6,9]. Bei vielen Betrachtungen dieser Art wurde die Biegesteifigkeit des Gürtels mit Hilfe der Balkentheorie behandelt, indem der Gürtel als Balken angesehen wurde. Es hat sich gezeigt, daß auf diese Weise qualitativ richtige Ergebnisse erhalten wurden.

Im Folgenden wird das bisher verwendete Ersatzmodell erweitert, so daß auch die vorhandenen Biegesteifigkeiten von Seitenwand und Gürtel berücksichtigt werden können.
Dazu sollen die bisher als reibungsfreie Gelenke angesehenen Verbindungselemente der Stäbe nun als Drehfedern mit der Federsteife c betrachtet werden.
Die Brauchbarkeit dieses Drehfedersystems läßt sich am komlizierten Reifenersatzmodell nur schwer überblicken. Es soll daher zunächst einmal an Hand eines einfachen Biegeproblems geklärt werden, ob ein durch Drehfedern verbundenes Stabsystem ein dem Balken ähnliches Biegeverhalten aufweist.

4.1.5.1. Vergleich der Biegelinie eines Balkens und der eines mit Drehfedern verbundenen Stabsystems

In Bild 36 ist ein Balken und das Ersatzmodell des Balkens dargestellt. Beide Systeme werden am Ende durch die Einzelkraft K belastet.
Der Balken habe den Elastizitätsmodul E und das Trägheitsmoment I.
Das Ersatzmodell besteht aus N_{Max} Drehfedern mit der Federsteifigkeit c_N. Es sind $N_{Max}-1$ Stabelemente mit der Länge l vorhanden. Diese Stabelemente seien undehnbar und nicht biegbar.

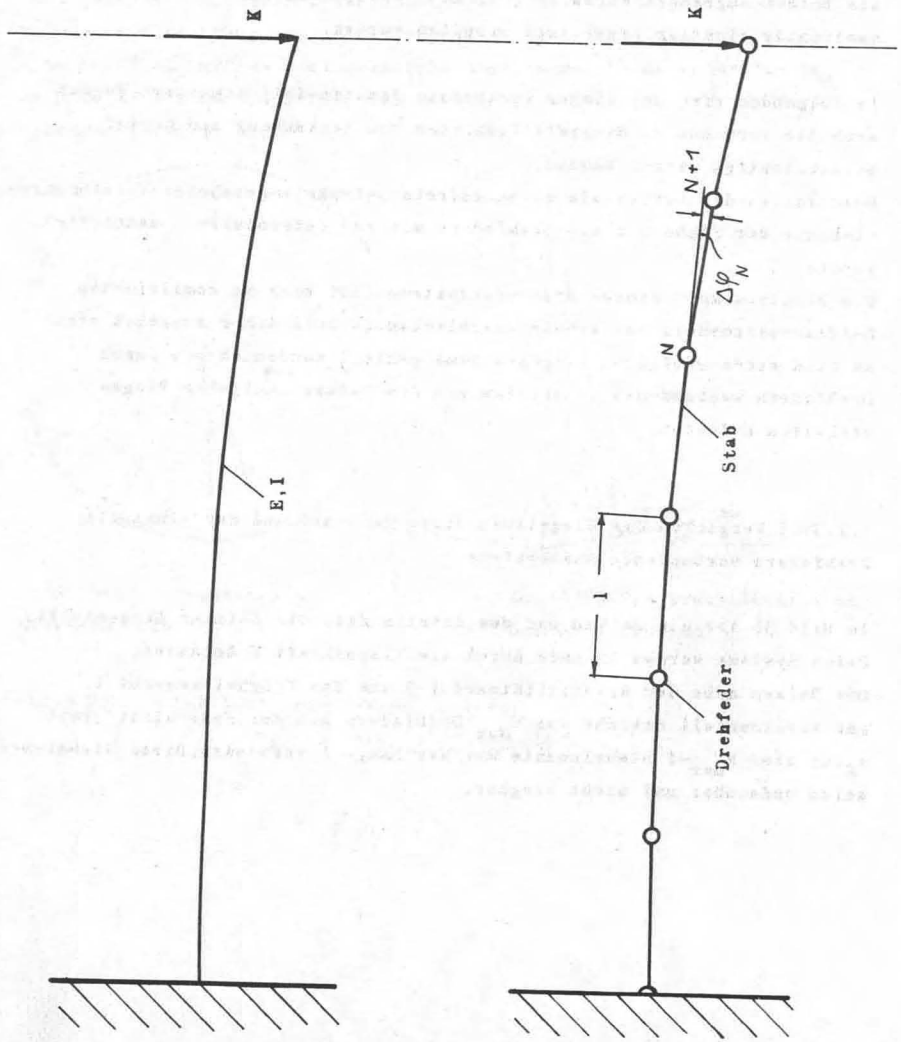


Bild 36: Der Balken und sein Ersatzmodell

Die Drehfeder am freien Stabende hat mechanisch keine Funktion, doch sie vereinfacht die Nummerierung.
Das Moment M_{FN} läßt sich leicht durch den Differenzwinkel multipliziert mit c_N angeben.(Bild 36).

$$M_{FN} = c_N \cdot \Delta\varphi_N$$

Das Moment ,das die Drehfedern belastet,ist das Schnittmoment,das sich wie folgt berechnet:

$$M_{SN} = k \cdot (N_{Max} - N) \cdot l$$

Das Schnittmoment M_{SN} an der Stelle,an der sich die Drehfeder mit der Nummer N befindet,ist gleich M_{FN}.

$$M_{SN} = M_{FN}$$

Der Winkel zur X-Achse ergibt sich zu:

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} M_{Fi} \cdot \frac{1}{c_i}$$

Wenn c_i = const = c,dann gilt auch:

$$\varphi_N = \frac{1}{c} \cdot \sum_{i=1}^{N} M_{Fi}$$

Für die Y-Koordinate erhält man:

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N-1} l \cdot \sin\varphi_i$$

Da die Winkel φ_N sehr klein sind,kann man näherungsweise $\sin\varphi_N \approx \varphi_N$ annehmen.

Mit dieser Annahme vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$Y_N = \ell \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i = \ell \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(M_j \cdot \frac{1}{c_j} \right) \right)$$

Für den Fall, daß alle Drehfedern die gleiche Ferdersteifigkeit haben, kann $c_j = c$ vor das Summenzeichen gezogen werden.

$$Y_N = \frac{\ell}{c} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{i} M_j \right)$$

Mithilfe dieser Gleichung kann nun die Durchsenkung Y_N für jeden Punkt, an dem sich eine Drehfeder befindet, berechnet werden.

Um nun feststellen zu können, ob das Ersatzmodell wesentliche Eigenschaften der Balkenbiegung darzustellen vermag, müssen die Biegelinien des Balkens und des Stabsystems verglichen werden. Um einen solchen Vergleich zu ermöglichen, muß ein Zusammenhang zwischen den mechanischen Größen des Balkens, dem E-Modul und dem Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts, und des Stabsystems, der Stablänge und Drehfedersteifigkeit, gefunden werden.

Um einen solchen Zusammenhang zu finden, wurde c so bestimmt, daß die Durchsenkung an der Kraftangriffsstelle für den Balken und das Ersatzsystem gleich waren.
Für die Durchsenkung des Balkens Y_{Max} gilt:

$$Y_{MAX} = \frac{K}{E \cdot I} \cdot \frac{L^3}{3}$$

Für die Durchsenkung Y_{Max} des Ersatzsystems:

$$Y_{MAX_{N_{MAX}}} = \frac{\ell^2}{c} \sum_{i=1}^{N_{MAX}-1} \left(\sum_{j=1}^{i} (N_{MAX} - j) \cdot K \right)$$

Mit $\ell = L/(N_{Max} - 1)$ erhält man:

$$Y_{MAX_{N_{MAX}}} = \frac{L^2}{(M-1)^2} \frac{K}{C} \cdot \sum_{i=1}^{N_{MAX}-1} \left(\sum_{j=1}^{i} (N_{MAX} - j) \right)$$

Setzt man $c = E\,I/l$ und setzt dies in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$Y_{MAX_{N_{MAX}}} = \frac{L^3 \cdot K}{E \cdot I \; (N_{MAX}-1)^3} \cdot \sum_{i=1}^{N_{MAX}-1} \left(\sum_{j=1}^{i} (N_{MAX} - j) \right)$$

Wenn folgender Ausdruck den Grenzwert 1/3 hat für $N_{Max} \to \infty$, dann ist c so bestimmt worden, daß die maximale Durchsenkung Y_{Max} von Balken und Ersatzmodell gleich ist.

$$\lim_{(N_{MAX}-1) \to \infty} \left(\frac{1}{(N_{MAX}-1)^3} \cdot \sum_{i=1}^{N_{MAX}-1} \left(\sum_{j=1}^{i} (N_{MAX} - j) \right) \right) = \frac{1}{3}$$

Daß der obige Ausdruck den Grenzwert 1/3 hat, ist aus Bild 38 ersichtlich.

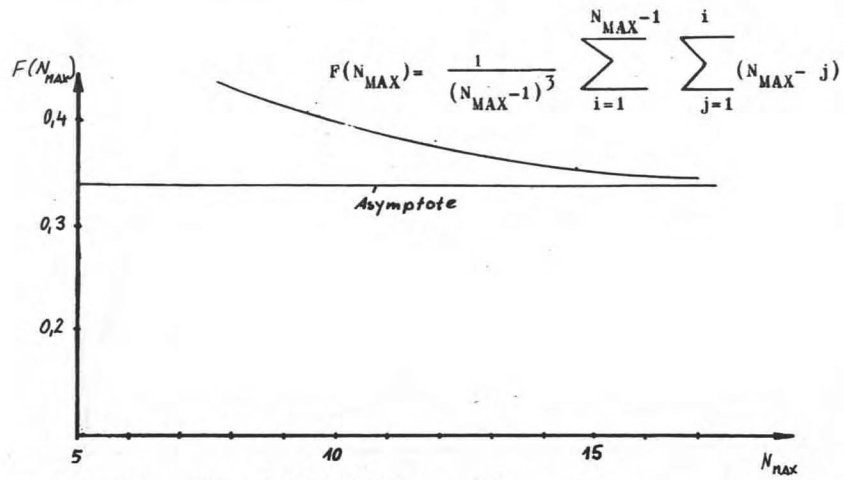


Bild 38: $F(N_{MAX})$ als Funktion von N_{MAX}

Es konnten nun, da ein Zusammenhang zwischen c, l und E, I gefunden wurde, die Biegelinien berechnet werden. Sie sind in Bild 39 dargestellt. Es ist ersichtlich, daß mit zunehmender Anzahl von Drehfedern pro Ersatzsystem die Annäherung an die Balkenbiegelinie zunimmt. Bei einer Anzahl von 100 Drehfedern ist ein Unterschied der Biegelinien zwischen Balken und Ersatzmodell so gering, daß er graphisch nicht mehr darstellbar ist. Das gewählte Ersatzmodell beschreibt somit das Verhalten eines Balkens unter reiner Biegung sehr genau.

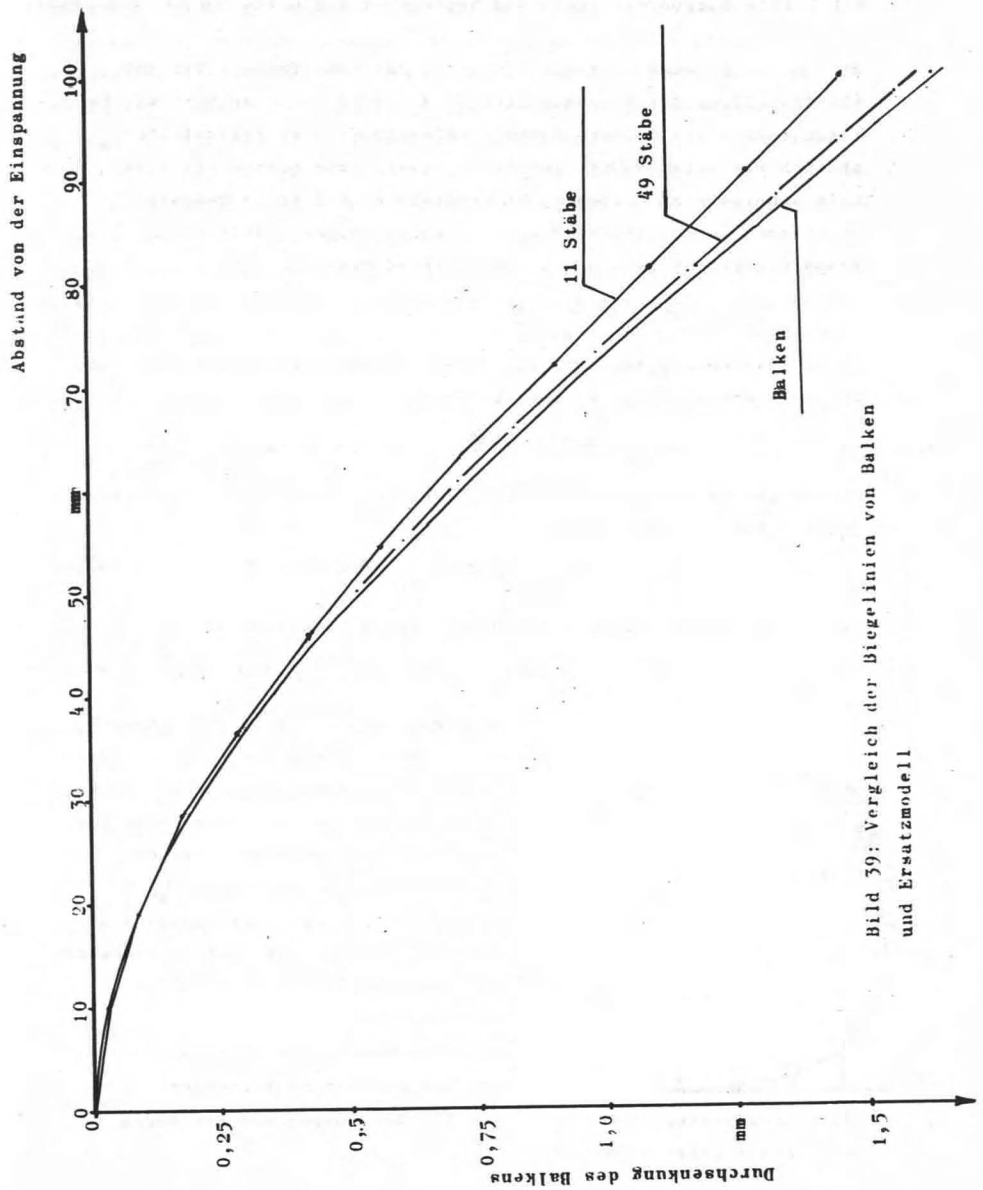


Bild 39: Vergleich der Biegelinien von Balken und Ersatzmodell

4.1.5.2 Die Biegesteifigkeit von Seitenwand und Gürtel in den Z-R-Ebenen

Bild 40 zeigt eine Querschnittshälfte des unverformten Reifens. (Radlast=0). Um die Biegesteifigkeit der Seitenwand zu berücksichtigen, werden die Gelenke durch Drehfedern mit der Federsteife C_N, ähnlich wie unter 4.1.5.1 geschehen, ersetzt. Die Drehfedern sind beim unbelasteten Reifen nicht verdreht, so daß keine Momente übertragen werden können. Für die Drehfedern gelte folgende Proportionalität zwischen Drehwinkel β und Moment:

$$MD = c \cdot \beta$$

Es ist zweckmäßig, zunächst die relative Lage der Stäbe zueinander im unverformten Zustand zu definieren:

$$\Delta\varphi 0_N = \varphi 0_N - \varphi 0_{N-2} \qquad mit\ N = 4, 6, \ldots, M$$

Im verformten Zustand (Radlast≠0) liegt die Differenz der Winkel $\Delta\varphi 1$ vor, für die dann gilt:

$$\Delta\varphi 1_N = \varphi 1_N - \varphi 1_{N-2} \qquad mit\ N = 4, 6, \ldots, M$$

Das an der Feder angreifende Moment ergibt sich dann zu

$$MD_{N-2} = (\Delta\varphi 1_N - \Delta\varphi 0_N) \cdot C_N \qquad mit\ N = 4, 6, \ldots, M$$

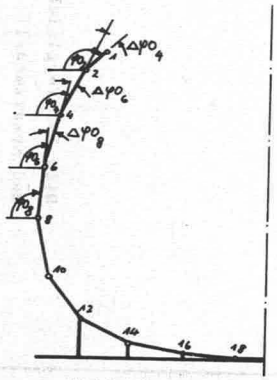


Bild 40: Querschnitt des unverformten Reifens

wenn man voraussetzt, daß die Kontur der Seitenwand von der Biegesteifigkeit nicht abhängt. Dies trifft exakt nicht zu, doch ist die Abweichung der Geometrie der Seitenwand bei der Federsteife $C_N=0$ gegenüber $C_N \neq 0$ sicherlich gering, da bekanntlich die Biegesteifigkeit der Reifenseitenwand des Gürtelreifens sehr klein ist.

Jeder Drehfeder des Querschnitts ist nun ein Moment zugeordnet. Um die Kraftwirkungen auf den Boden

berechnen zu können, muß das Momentengleichgewicht mit den Kräften NKM'_N berechnet werden. Die Berechnung soll als ebenes Problem in der Z-R-Ebene durchgeführt werden. Die Momente infolge relativer Winkeländerungen der Stäbe senkrecht zur Z-R-Ebene sind also nicht enthalten. Sie liegen in der Größenordnung um den Faktor 10^2 kleiner, so daß eine Vernachlässigung zulässig ist.
Um nun die Berechnung in der Z-R-Ebene durchführen zu können, wird ein Stabsystem in der Z-R- Ebene definiert, das durch senkrechte Projektion des Radialstabsystems auf die Ebene E entsteht. (Bild 41). Dies geschieht, indem die Koordinaten des zu berechnenden Stabsystems durch Koordinatentransformation in das BXS-BYS-BZS-System umgerechnet werden. (Bild 41). Das geschieht auf folgende Weise:
Für den Verbindungsvektor der Punkte $\vec{S} = P_{E,M-N-2} - P_{E,M-N}$ gilt:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} BX_{E,M-N-2} - BX_{E,M-N} \\ BY_{E,M-N-2} - BY_{E,M-N} \\ BZ_{E,M-N-2} - BZ_{E,M-N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{BX_{E,M-N}} \\ S_{BY_{E,M-N}} \\ S_{BZ_{E,M-N}} \end{pmatrix}$$

Dem entspricht im BXS-BYS-BZS-System:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_{BXS_{E,M-N}} \\ S_{BYS_{E,M-N}} \\ S_{BZS_{E,M-N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{BX_{E,M-N}} \cdot COS(\Psi_E) + S_{BZ_{E,M-N}} \cdot SIN(\Psi_E) \\ S_{BY_{E,M-N}} \\ -S_{BX_{E,M-N}} \cdot SIN(\Psi_E) + S_{BZ_{E,M-N}} \cdot COS(\Psi_E) \end{pmatrix}$$

Die Komponenten $S_{BXS_{E,M-N}}$ und $S_{BZS_{E,M-N}}$ liegen in der Ebene E.

Dann hat die senkrechte Projektion der Länge L_{M-N} auf die Ebene E die Länge:

$$VL_{E,M-N} = \sqrt{S^2_{BYS_{E,M-N}} + S^2_{BZS_{E,M-N}}}$$

Der Winkel zur Z-Richtung ergibt sich zu:

$$W_{E,M-N} = Arctan\,(S_{BZS_{E,M-N}} / S_{BYS_{E,M-N}})$$

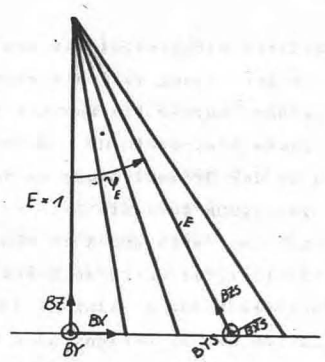


Bild 41:Die Lage der Koordinatensysteme BX-BY-BZ und BXS-BYS-BZS in den entsprechenden Z-R-Ebenen

Das Radialstabsystem besitze zunächst nur Gelenke und es befinde sich im Gleichgewicht.Diese Gleichgewichtskräfte werden im Folgenden nicht betrachtet Am zweckmäßigsten lassen sich die Normalkräfte infolge Biegung des Radialstabsystems dann mithilfe des Superpositionsprinzips bestimmen. Das in Bild 42 a dargestellte Radialstabsystem besitze zunächst nur eine Drehfeder mit der Federsteife $C_{M-J+N}=0$,während für die restlichen Drehfedern $C_N=0$ gilt,Für die Reaktionskräfte ergibt sich dann:

$$KR_{M-J+N} = \frac{MD_{M-J+N}}{VL_{E,M-J+N+2} \cdot COS(W_{E,M-J+N+2})}$$

$$KL_{M-J+N} = \frac{MD_{M-J+N}}{VL_{E,M-J+N} \cdot COS(W_{E,M-J+N})}$$

$$KM_{M-J+N} = KR_{M-J+N} + KL_{M-J+N}$$

Die restliche Drehfedern erhalten nun auch die Federsteife $C_N \neq 0$,so daß sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips die Belastungen gemäß Bild 42 b ergeben.

Betrachtet man die Kräfte an einem Gelenkpunkt,so stellt man fest,daß KM_N nur in Sonderfällen gleich $KL_N + KR_N$ sein kann.Aus diesem Grund muß eine weitere Kraft eingeführt werden,so daß in allen Fällen Kräftegleichgewicht möglich ist.Diese Kraft NKM'_N stellt die Bodenkraft dar. NKM' kann negativ werden,so daß in Extremfällen,wenn der Betrag von NKM' sehr groß ist, die Summe der Normalkräfte am entsprechenden Gelenkpunkt insgesamt negativ wird und damit ein Abheben des Vertikalstabes von der Fahrbahn erfolgt.Für diesen Fall gilt der Rechenansatz nicht,da die Geometrie im Bereich der Aufstandsfläche als bekannt vorausgesetzt wird. Dieser Fall ist technisch nicht erwünscht,so daß ein Versuch der Berechnung nicht nötig ist.

Bild 42a: Das Radialstabsystem im Bereich der Aufstandsfläche mit Drehfeder verschiedener Federsteife $C_{M-J+N} \neq 0$,die restlichen Drehfedern $C_N = 0$ Es sind nur die Kräfte infolge der Drehfedersteifigkeiten dargestellt.

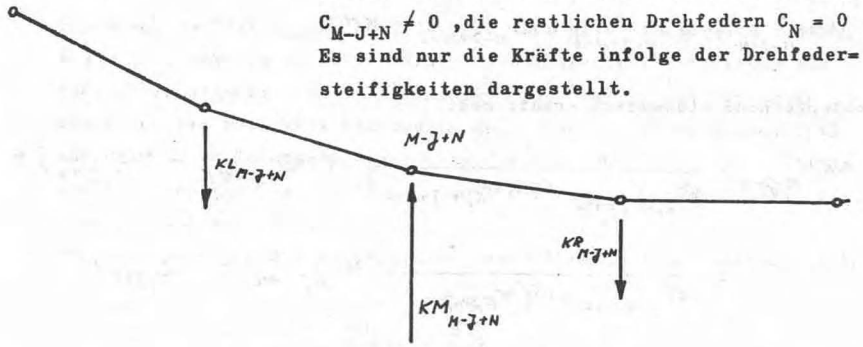
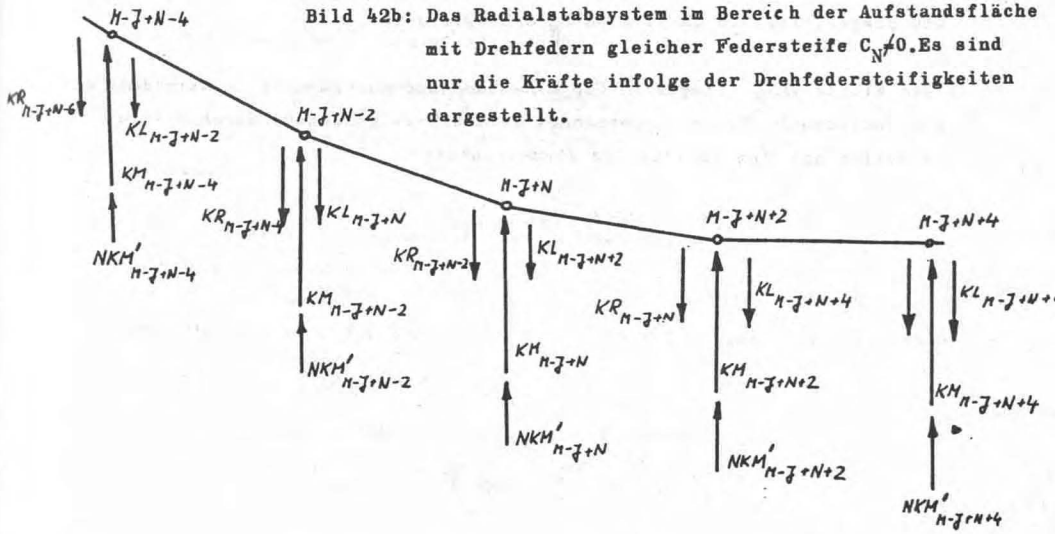


Bild 42b: Das Radialstabsystem im Bereich der Aufstandsfläche mit Drehfedern gleicher Federsteife $C_N \neq 0$.Es sind nur die Kräfte infolge der Drehfedersteifigkeiten dargestellt.



Für das Kräftegleichgewicht am Punkt M-J+N gilt dann:

$$NKM'_{M-J+N} = KR_{M-J+N-2} + KL_{M-J+N+2} - KM_{M-J+N}$$

entsprechend eingesetzt erhält man:

$$NKM'_{M-J+N} = \frac{1}{VL_{E,M-J+N+2} \cdot \cos(W_{E,M-J+N+2})} \cdot (MD_{M-J+N+2} - MD_{M-J+N}) +$$

$$+ \frac{1}{VL_{E,M-J+N} \cdot \cos(W_{E,M-J+N})} \cdot (MD_{M-J+N-2} - MD_{M-J+N})$$

Nach dieser Gleichung können die Bodenkräfte NKM'_N berechnet werden. Am Rand entsteht allerdings ein Fehler dadurch, daß die Lage des Punktes mit der Nummer M-J-2 sich durch die Kräfte und Momente ändert, was nicht in die Rechnung eingeht. Die Änderung wird jedoch klein sein, da die Biegesteife und damit auch C_N sehr klein ist.

Die Kräfte NKM'_N liegen in der Z-R-Ebene und müssen noch in Normalenrichtung zur Fahrbahnoberfläche umgerechnet werden. Dies geschieht durch Multiplikation mit dem Cosinus des Ebenenwinkels:

$$NKM_N = NKM' \cdot \cos(\psi_E)$$

4.1.5.3. Die Biegesteifigkeit des Gürtels in Umfangsrichtung

Die Biegesteifigkeit des Gürtels wird auch hier wie bereits unter 4.1.5.1. geschehen durch Drehfedern realisiert. Die Verdrehung der Federn sei proportional dem Drehmoment $MG_{E,N}$. $MG_{E,N}$ ist ein zweidimensionales Feld, weil einerseits $MG_{E,N}$ von der Krümmungsänderung abhängt, die in Umfangsrichtung veränderlich ist, und der Biegesteifigkeit CG_N, die über der Breite der Aufstandsfläche veränderlich sein kann.

Für die Differenz der Winkel $\varphi 0$ vor der Deformation des Reifens (Bild 44b) gilt:

$$\Delta\varphi 0_E = \varphi 0_{E+1} - \varphi 0_E$$

Für die Differenz der Winkel nach der Deformation des Reifens (Bild 44a) gilt:

$$\Delta\varphi 1_E = \varphi 1_{E+1} - \varphi 1_E$$

Für das Moment $MG_{E,N}$ ergibt sich dann:

$$(41) \quad MG_{E,N} = (\Delta\varphi 1_E - \Delta\varphi 0_E) \cdot CG_N$$

Die Differenz der Winkel vor der Deformation des Reifens ist konstant:

$$\Delta\varphi 0_E = \delta$$

Nach der Deformation im Bereich der Aufstandsfläche ist die Differenz der Winkel wieder konstant:

$$\Delta\varphi 1_E = 0$$

Damit lassen sich die Momente im Bereich der Aufstandsfläche berechnen:

$$MG_{E,N} = \delta \cdot CG_N$$

Am Rand der Aufstandsfläche gilt für die Momente:

$$MG_{EMAX,N} = (\Delta\varphi 1_{EMAX} - \Delta\varphi 0_{EMAX}) \cdot CG_N$$

$$MG_{EMAX+1,N} = (\Delta\varphi 1_{EMAX+1,N} - \Delta\varphi 0_{EMAX}) \cdot CG_N$$

Da die Winkel $\xi 1_{EMAX+1,N}$ und $\xi 1_{EMAX+2,N}$ (Bild 44a und b) nicht bekannt sind und es auch nicht gelang aus dem Kräftegleichgewicht die Form des Stabsystems am Rand zu berechnen, ist eine exakte Berechnung der Normalkräfte im Bereich des Ein-und Auslaufs der Aufstandsfläche für das Ersatzmodell nicht möglich.
Im übrigen Bereich der Aufstandsfläche lassen sich jedoch interessante Feststellungen treffen.
Betrachtet man das statische Gleichgewicht an einem Gürtelstabelement der Aufstandsfläche, so gilt folgendes: Das Moment $MG_{E,N}$ wird durch die Kräfte $Q=MG_{E,N}/LX_N$ im Gleichgewicht gehalten. Damit das Kraftegleichgewicht erfüllt ist, muß eine Kraft $F=2*Q$ auf die Drehfeder wirken. (Bild 43a)

Betrachtet man nun mehrere solcher Elemente nebeneinander (Bild 43b), so ergibt sich folgendes Bild: Da die Momente $MG_{E,N}$ alle gleich groß sind und damit auch die Kräfte Q, ist die Summe aller Kräfte an den Drehfedern gleich Null. Demnach hat beim Ersatzmodell die Biegesteifigkeit des Gürtels außer am Ein-und Auslauf keinen Einfluß auf die Bodendruckverteilung. Es wurde weiterhin versucht, den Einfluß der Biegesteifigkeit des Gürtels auf die Normaldruckverteilung auch am Ein-und Auslauf zu untersuchen. Es gelang zwar, die Form des Ein-und Auslaufs so in die Rechnung einzugeben, daß die dann erhaltene Bodendruckverteilung mit veröffentlichten Messungen übereinstimmte, doch der physikalische Wert dieser Ergebnisse ist gering, da gerade die Ursache für die Form am Ein- und Auslauf interessiert. Auf den Verlauf der Bodendruckverteilung am Ein-und Auslauf wird daher auch nur kurz eingegangen werden.

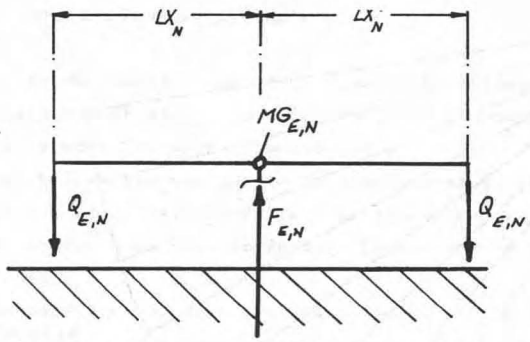


Bild 43a: Kräfte-und Momentengleichgewicht an einem Element bestehend aus 2 Gürtelstäben, einem Vertikalstab und einer Drehfeder. In der Drehfeder wirkt das Moment $MG_{E,N}$

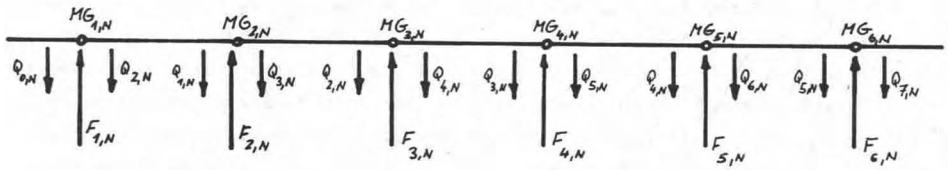


Bild 43b: Kräfte-und Momentengleichgewicht, wenn mehrere Elemente miteinander verbunden werden (Vergleiche Bild 43a)

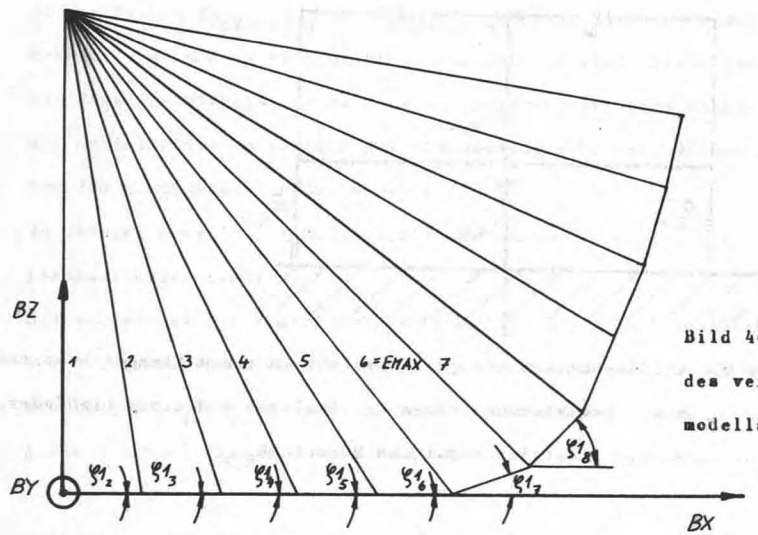


Bild 44a: Seitenansicht des verformten Ersatzmodells

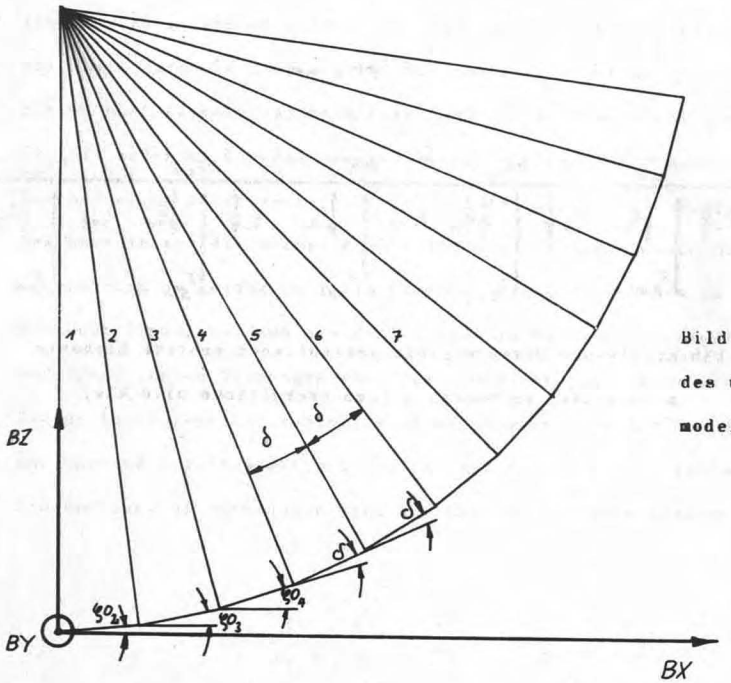


Bild 44b: Seitenansicht des unverformten Ersatzmodells

4.1.5.4. Die Form des Ein-und Auslaufs

Die Form des durch eine Radlast verformten Gürtelreifens konnte für den Bereich des Ersatzmodells ,dessen Laufflächenanteil Bodenkontakt hat,berechnet werden (Bereich 1 in Bild 45).
In genügender Entfernung von diesem Bereich werden die Einflüsse der Verformung abgeklungen sein,so daß der Reifenquerschnitt dort die gleiche Form wie im unbelasteten Zustand (Radlast = 0) aufweist (Bereich 2).

Die Übergangszone,die zwischen den genannten Bereichen liegt,wird Einfluß auf die Bodendruckverteilung am Längsrand der Aufstandsfläche haben.

Einerseits wird das Kräftegleichgewicht am Längsrand durch die Richtungen der Gürtelstäbe,die durch die Winkel $\varphi_{1_{EMAX+1,N}}$ gekennzeichnet sind, beeinflußt (Bild 44a).Die im Gürtelstab auftretende Zugkraft GK_N bewirkt mit der Komponente $GK_N \cdot SIN(\varphi_{1_{EMAX+1,N}})$ eine Verminderung der Normalkraft NK_N.Da die Winkel $\varphi_{1_{EMAX+1,N}}$ klein sind,kann der Einfluß der Gürtelkraft GK_N auf die Normalkraftverteilung vernachlässigt werden.

Nicht vernachlässigbar hingegen ist der Einfluß der Form des Gürtels in der Übergangszone auf die in den Drehfedern auftretenden Momente,die einen merklichen Einfluß auf die Bodendruckverteilung am Längsrand der Aufstandsfläche haben (Vergleiche 4.1.5.3.).Daher wurde die Form des Teils der Übergangszone,der die Normaldruckverteilung beeinflußt und der durch die Winkel $\varphi_{1_{EMAX+1,N}}$ und $\varphi_{1_{EMAX+2,N}}$ beschrieben wird,derart berechnet,daß die dadurch bewirkte Bodendruckverteilung am Rand mit veröffentlichten Meßergebnissen übereinstimmte.

Soll nun der Einfluß der Form am Ein-und Auslauf in der Übergangszone auf die Normaldruckverteilung weitergehend erfaßt werden als dies hier geschah,so könnte ergänzend experimentell die Form des Gürtels in der Übergangszone untersucht werden.Mit Hilfe der dabei erhaltenen Daten ließen sich dann weitergehende Aussagen machen.

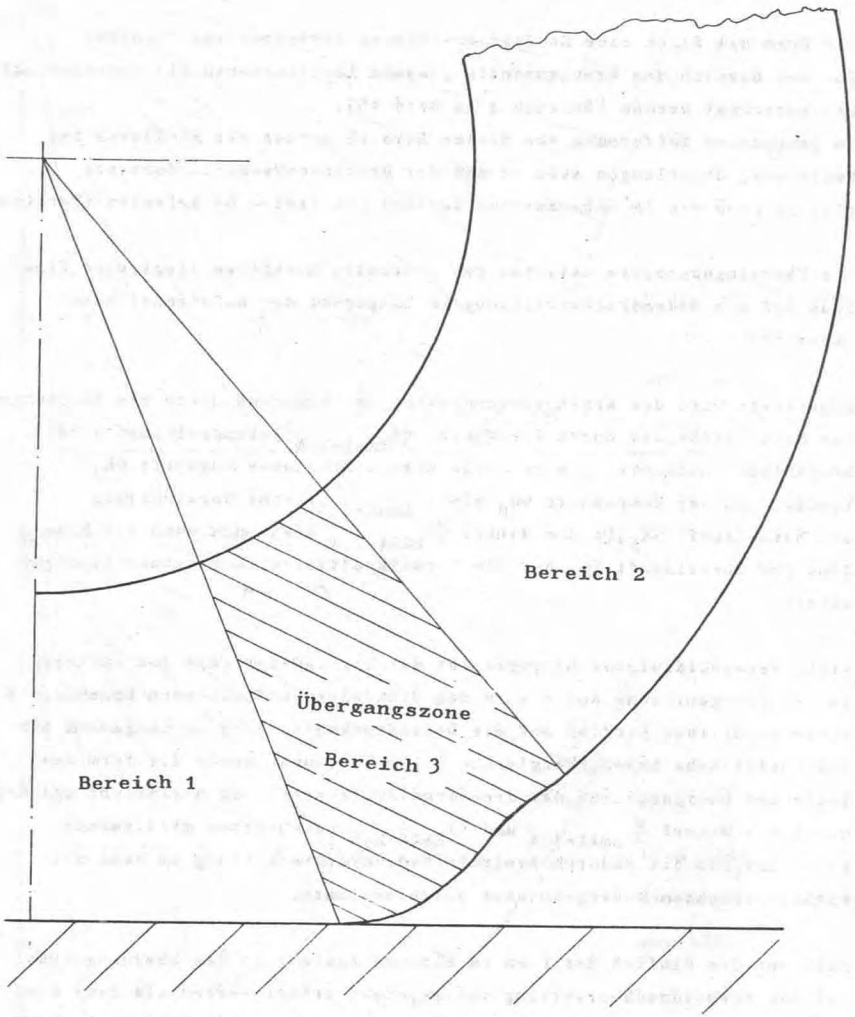


Bild 45: Seitenansicht des verformten Gürtelreifens

4.2. Der frei rollende Luftreifen bei niedrigen Rollgeschwindigkeiten

4.2.1. Allgemeines zur Berechnung des rollenden Reifens

Der belastete rollende Reifen bringt eine große Zahl zusätzlicher Probleme,die die rechnerische Behandlung erheblich gegenüber dem statisch belasteten,ruhenden Reifen erschweren.Die Betrachtungen sollen sich daher auf den frei rollenden Reifen beschränken,so daß man näherungsweise,sieht man von den Verhältnissen am Ein-und Auslauf ab, die auch beim statisch belasteten Reifen vorhandenen Symmetrien zur vereinfachenden Berechnung ausnutzen kann.

Da niedrige Rollgeschwindigkeiten vorausgesetzt werden,kann auf die Berücksichtigung der Trägheitskräfte verzichtet werden.Auch soll die unter statischer Belastung vorliegende Symmetrie der Querschnittsebenen und die des Stabnetzes der Aufstandsfläche auch beim rollenden Reifen vorliegen.In Wirklichkeit wird sich eine Änderung der geometrischen Verhältnisse ergeben,da durch den Rollvorgang Längs-und Querkräfte infolge Reibung auftreten.Diese Längs-und Querkräfte beeinflussen das Kräftegleichgewicht im Cordfaden bzw beim verwendeten Ersatzmodell das Kräftegleichgewicht an den Gelenken bzw Drehfedern im Bereich der Aufstandsfläche .Dadurch ändern sich die Kräfte $\overline{SLG}_N$,$\overline{GK1}_N$ und $\overline{GK2}_N$, so daß sich daraus resultierend die Normalkraftverteilung ändert.

Eine Änderung der Normalkraftverteilung bewirkt bei konstanter Radlast eine Änderung der Einfederung.Die Änderung der Normalkraftverteilung,die durch die Längs-und Querkräfte des frei rollenden Reifens verursacht wird, ist sicherlich gering,da der Betrag der Reibungskräfte klein ist und daher das Kräftegleichgewicht an den Gelenkpunkten dadurch nur geringfügig verändert wird.Doch sollte man diesen Einfluß sehen,denn beim Reifen,der durch Umfangs-oder Seitenkräfte belastet wird,kann dieser Effekt nicht mehr vernachlässigt werden.

Die Tatsache,daß sich die Einfederung des langsam rollenden Reifens gegenüber dem stehenden Reifen merkbar ändert,hat eine Ursache in der Änderung der Biegesteifigkeiten des beim rollenden Reifen dynamisch beanspruchten Gummi-Cordgewebes.Die dynamischen Eigenschaften von Gummi-Cordgewebe können beim Ersatzmodell nur durch geschwindigkeitsabhängige Materialkonstanten berücksichtigt werden.

Die Relativbewegungen in der Aufstandsfläche hängen auch von den Fadenwinkeln ab. Bei ausgeführten Gürtelreifen weist der Unterbau einen Zenithwinkel von 85 bis 90 Grad auf, der des Gürtels liegt zwischen 5 und 30 Grad. Die Zenithwinkel des Ersatzmodells betragen 90 Grad für den Unterbau (Radialstabsysteme) und 0 Grad für den Gürtel. Der Zenithwinkel des Gürtels hat sicherlich Einfluß auf die Gleitbewegungen und Energieverluste im Bereich der Aufstandsfläche, so daß die Gültigkeit der folgenden Betrachtungen nur für Gürtelreifen mit kleinem Zenithwinkel zutreffen dürfte.

Ein weiteres Problem ergibt sich bei der Berechnung des rollenden Reifens durch die endliche Zahl von Radialstabsystemen. Bild 46 zeigt das Ersatzmodell zum Zeitpunkt $t=t_0$. Es haben EMAX*2 - 1 Radialstabsysteme Bodenkontakt. Bewegt sich nun der Reifen um die Strecke Δs weiter, so wird das Radialstabsystem der Ebene E_A vom Boden abheben, es wird jedoch noch nicht die Ebene EMAX+1 eingelaufen sein. Um die Radlast aufnehmen zu können würden sich, da jetzt weniger Radialstabsysteme Bodenkontakt haben und da sich ihre Lage geändert hat, andere Kräfte ergeben als sie zum Zeitpunkt t_0 auf und in dem Radialstabsystem gewirkt haben. Das Ersatzmodell des Reifens wird damit beim stationären Rollen durch zeitlich instationäre Kräfte im Gleichgewicht gehalten. Verringert man den Winkel δ, so daß sich die Zahl der Ebenen mit Radialstabsystemen vergrößert, so werden die Schwankungen der Kraftfelder über der Zeit abnehmen, um schließlich für $\delta \to 0$ zu verschwinden. $\delta \to 0$ würde bedeuten, daß unendlich viele Z,R-Ebenen verwendet werden müßten.
Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird angenommen, daß, wenn sich der Reifenumfang um die Strecke LX_{M-2} weiterdreht, die Normalkraftverteilung während dieser Bewegung erhalten bleibt. Für die Anzahl der Radialstabsysteme mit Bodenkontakt wird angenommen, daß sie konstant ist. Die Fehler beider Annahmen sind um so geringer, je kleiner der Winkel δ ist.

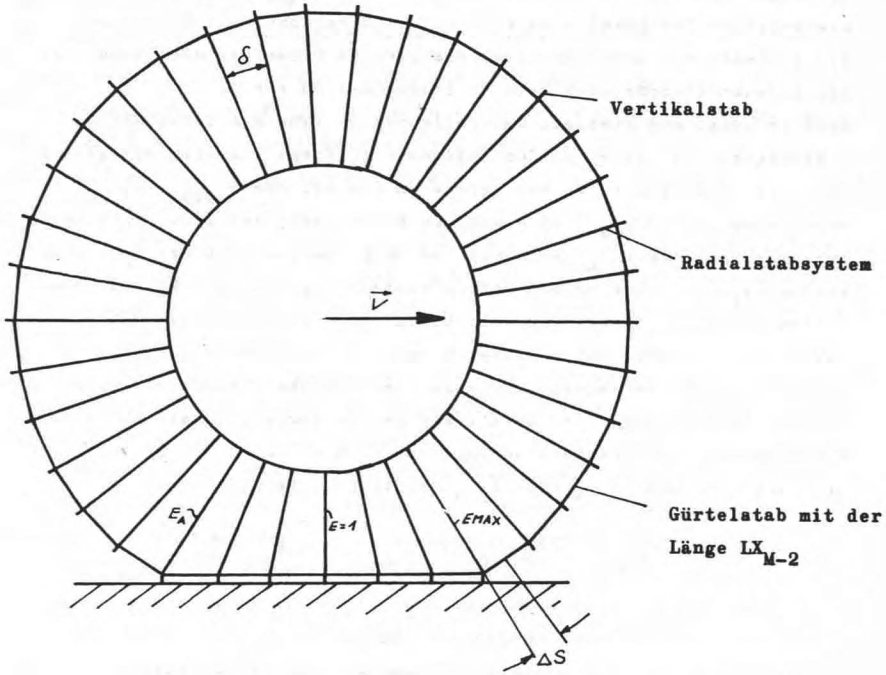


Bild 46: Seitenansicht des Ersatzmodells

4. 2. 2. Die Relativbewegungen im Stabnetz der Aufstandsfläche

Die Lage der Gelenkpunkte in der Aufstandsfläche wurde für den stehenden Reifen bereits unter 4.1.1.1. berechnet, Mit den unter 4.2.1. genannten Annahmen liegt die gleiche Geometrie des Stabnetzes der Aufstandsfläche auch beim rollenden Reifen vor.
Bild 48 zeigt ein Stabnetz des rollenden Reifens zum Zeitpunkt t_0 (durchgezogene Linien). Zum Zeitpunkt t_1 liege wiederum die gleiche Geometrie des Stabnetzes vor jedoch um die Strecke $S_{Gleit} + LX_{M-2}$ verschoben. Mit S_{Gleit} wird der Weg bezeichnet, der infolge Umfangsschlupf zurückgelegt wird, LX_{M-2} sei genau der Weg, um den sich der Reifen in der Zeit $\Delta t = t_1 - t_0$ infolge reinem Rollen weiterbewegt. Beim frei rollenden Reifen ist S_{Gleit} sicherlich sehr klein, doch grundsätzlich müßte auch unter den vereinfachenden Annahmen von 4.2.1. ein Umfangschlupf vorhanden sein. Die Relativbewegungen gegenüber der Fahrbahn sind rechnerisch sehr einfach zu ermitteln. Der Relativweg des Gelenkpunktes mit der Nummer E,N gegenüber der Fahrbahn während der Zeit Δt in BX bzw BY-Richtung Richtung wird mit $UX_{E,N}$ bzw $UY_{E,N}$ bezeichnet. Es gilt dann:

$$UX_{E,N} = BX_{E-1,N} + S_{Gleit} + LX_{M-2} - BX_{E,N}$$

$$UY_{E,N} = BY_{E-1,N} - BY_{E,N}$$

Der gesamte Relativweg eines Gelenkpunktes während der Zeit Δt beträgt:

$$\overrightarrow{UGES}_{E,N} = \begin{pmatrix} UX_{E,N} \\ UY_{E,N} \end{pmatrix}$$

Bild 49 zeigt die Relativwege $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$, die auch zeichnerisch aus Bild 48 erhalten werden können.
Die Relativbewegungen der Gelenkpunkte gegenüber der Fahrbahn bewirken, daß auch die Vertikalstäbe relativ zur Fahrbahn bewegt zumindest jedoch schiefgestellt werden.
Dieser Schiefstellung der Vertikalstäbe entspricht beim wirklichen Reifen eine Schubverformung des Laufflächengummis. Dem Vertikalstab muß die Schiefstellung durch eine Reibungskraft an seinem Fußpunkt aufgezwungen werden.
Die Auswirkungen der Relativbewegungen $\overrightarrow{UGES}$ auf das Verhalten der Vertikalstäbe lassen sich am besten anhand von Bild 47 darstellen.

Dort sind 2 Vertikalstäbe mit den entsprechenden Gelenken und Stäben zu den Zeitpunkten t_0 und t_1 dargestellt. Bild 47 stellt eine Ausschnittsvergrößerung vom Bild 48 dar.
Die auf Grund der Rollbewegungen auftretenden Relativwege $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ führen dazu, daß die Vertikalstäbe auf der Fahrbahn gleiten, wenn die Haftreibungskraft am Fußpunkt des Vertikalstabes nicht ausreicht, um der durch die Schiefstellung bewirkten Kraft das Gleichgewicht zu halten. Dieser Fall ist für den Punkt E + 1, N dargestellt.

Reicht die Haftreibungskraft hingegen aus, um der durch die Schiefstellung bewirkten Kraft das Gleichgewicht zu halten, so wird kein Gleiten des Vertikalstabes auf der Fahrbahn stattfinden. Dieser Fall wurde für den Punkt E, N dargestellt.
Es wurde versucht, die Längsschub- und Querschubkräfte zu berechnen, indem das Kräftegleichgewicht an den Fußpunkten der Vertikalstäbe berechnet wurde. Schwierigkeiten entstanden bei der Erfassung der Reibungseigenschaften von Gummi, die ja bekanntlich stark geschwindigkeitsabhängig sind. Es wurde eine von Kummer gemessene Reibungskurve den Berechnungen zugrunde gelegt, die den Reibwert als Funktion der Geschwindigkeit darstellt.
Die Rechenergebnisse für die Längs- und Querschubkräfte zeigten jedoch keine zufriedenstellende Übereinstimmung mit bekannt gewordenen Meßergebnissen. Vermutlich muß das Schubverformungsverhalten von Gummi genauer beschrieben werden als durch eine Federzahl, wie es in den durchgeführten Rechnungen geschah. Insbesondere müßten die Dämpfungskräfte, die bei der Schubverformung entstehen, berücksichtigt werden. Qualitative Aussagen lassen sich jedoch machen. Die beiden beschriebenen Arten von Energieverlust, Schubverformung von Gummi und Gleiten der Vertikalstäbe auf der Fahrbahn erhöhen den Rollwiderstand.
Die Gleitbewegung der Vertikalstäbe gegenüber der Fahrbahn ist auch eine wesentliche Ursache für den Abrieb. Da der Rollwiderstand wie auch der Abrieb möglichst klein sein sollen, ist zu fordern, daß eine der Ursachen, die Verschiebungen $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$,möglichst klein sein müssen.

$\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ ist dann minimal, wenn folgendes gilt:

$$BY_{E-1,N} = BY_{E,N}$$

und

$$BX_{E-1,N} = S_{Gleit} + LX_{M-2} = BX_{E,N}$$

und

$$S_{Gleit} = 0$$

Abgesehen von der Bedingung $S_{Gleit} = 0$ sind die übrigen Bedingungen dann erfüllt, wenn das Stabnetz der Aufstandsfläche aus lauter Rechtecken besteht. Je mehr das Stabnetz von dieser Form abweicht, desto größer wird im Bereich der Aufstandsfläche beim freien Rollen der Verschleiß sein.

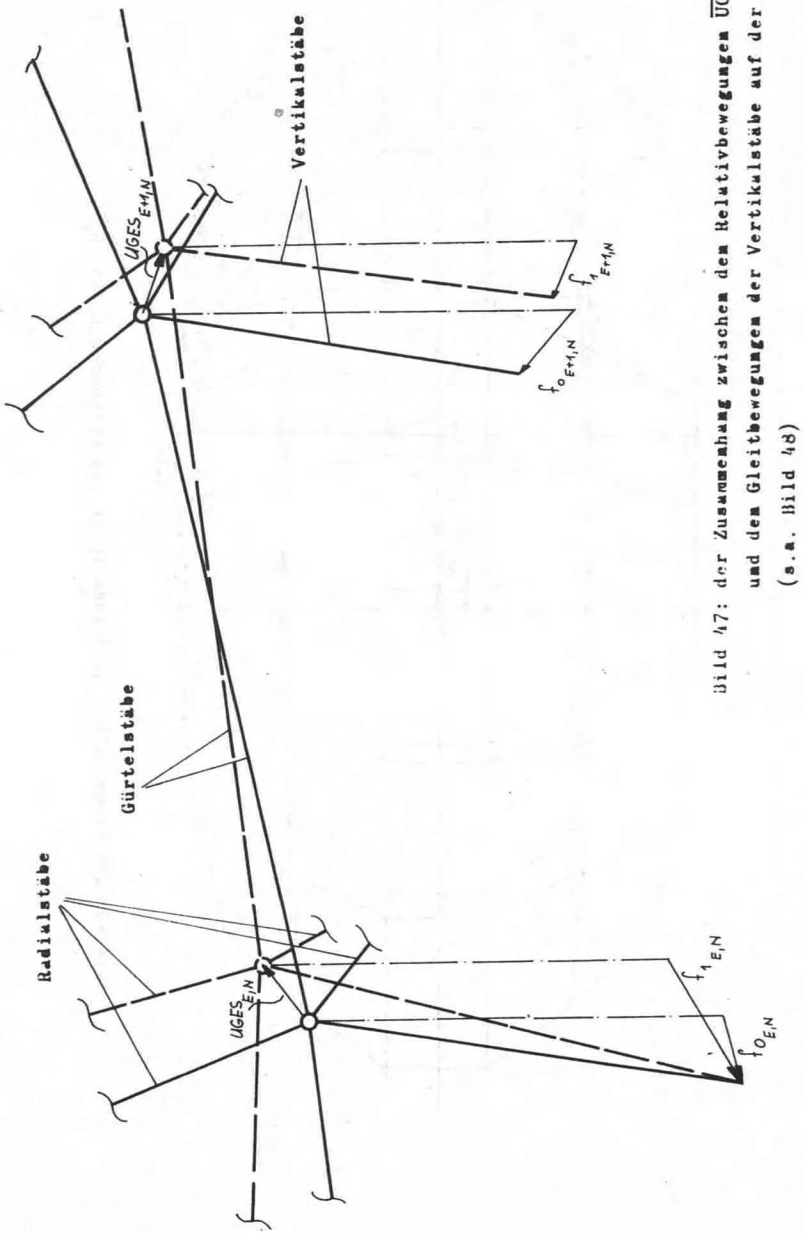


Bild 47: der Zusammenhang zwischen den Relativbewegungen $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ und den Gleitbewegungen der Vertikalstäbe auf der Fahrbahn. (s.a. Bild 48)

Zeitpunkt t_0: durchgezogene Linien
Zeitpunkt t_1: gestrichelte Linien

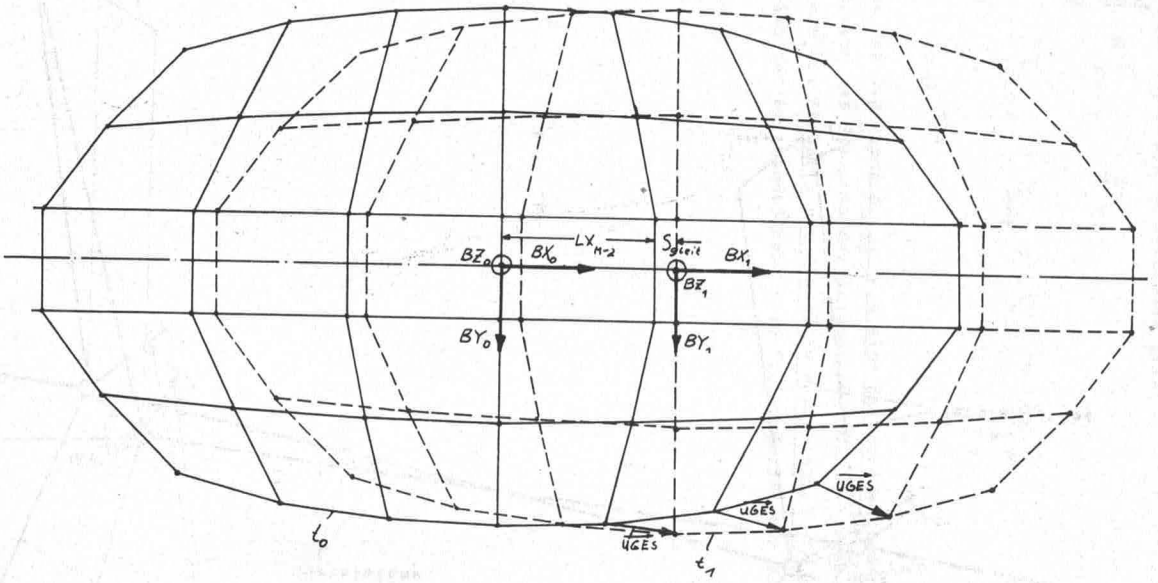


Bild 48: Das Stabnetz der Aufstandsfläche zum Zeitpunkt t_0 und t_1

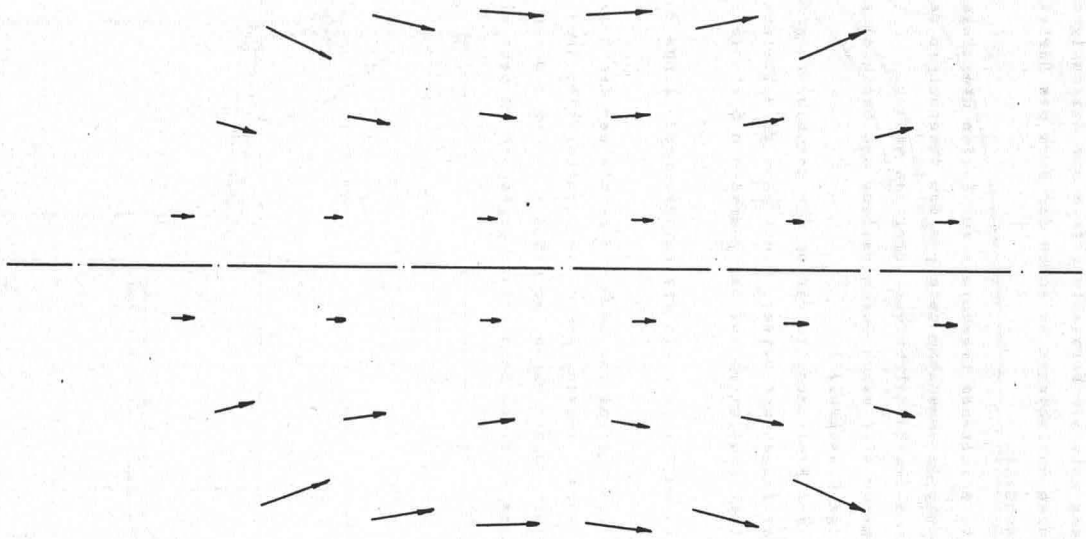


Bild 49: Die Relativbewegungen der Gelenkpunkte $\overrightarrow{UGES}$ für die in Bild 48 dargestellte Bewegung

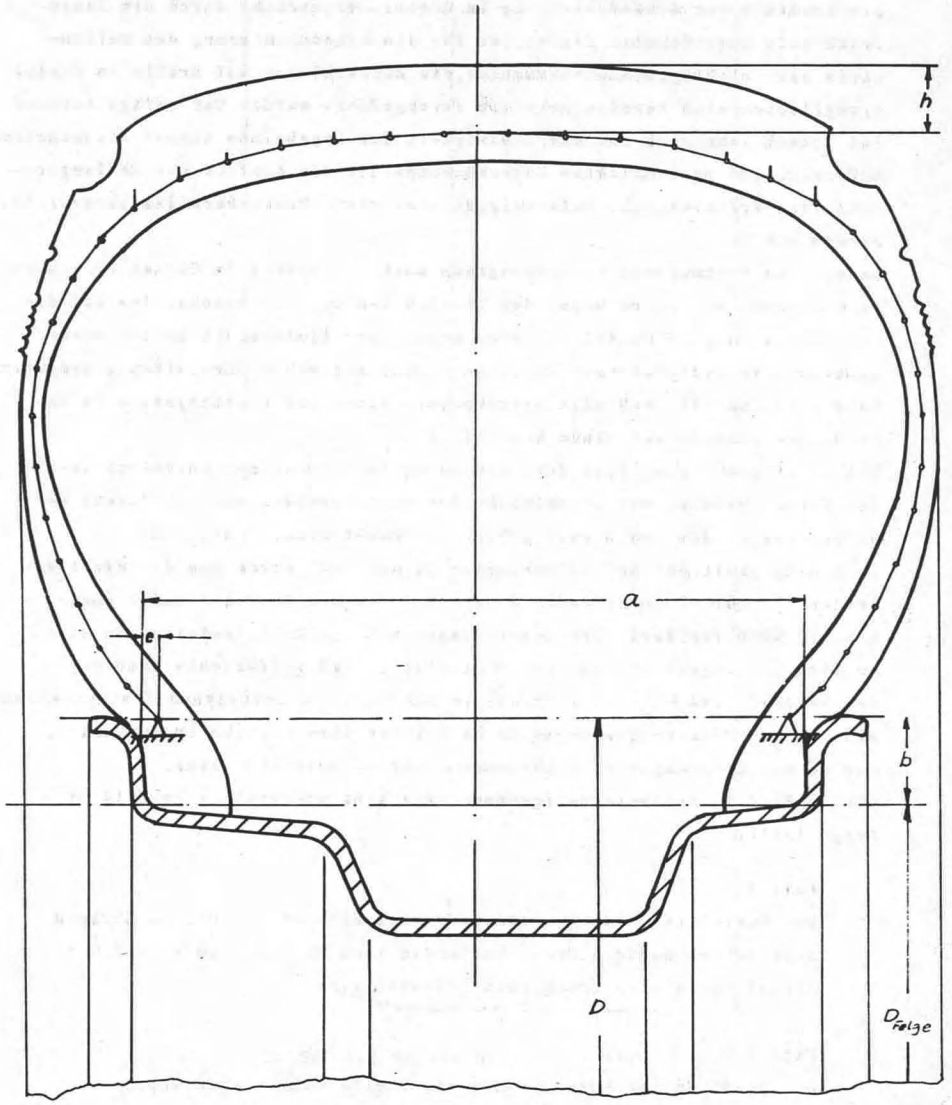
5. Ergebnisse der Berechnungen

5.1. Der Zusammenhang zwischen Herstellungsform und Reifeneigenschaften

5.1.1. Die geometrischen Beziehungen zwischen der Form des Gürtelreifens und dem Ersatzmodell.

Um die am Ersatzmodell erhaltenen Ergebnisse auf Reifen übertragen zu können, muß zunächst ein Zusammenhang zwischen den Abmessungen des Ersatzmodells und denen des Gürtelreifens angegeben werden.
Bild 51 zeit den Querschnitt eines Gürtelreifens und darin eingezeichnet das zugehörige Ersatzmodell.
Der Innendurchmesser des Ersatzmodells muß um die Hornhöhe 2b größer gewählt werden als der Felgendurchmesser, damit eine gute Übereinstimmung zwischen der rechnerisch bestimmten und der gemessenen Gleichgewichtsform erreicht wird.
Die Maulweite a ergibt um e vermindert die entsprechende Länge B_F beim Ersatzmodell.
Der Außendurchmesser des Reifens ist um $2h$ größer als der des Ersatzmodells. Dies hätte vermieden werden können, indem die Vertikalstäbe jeweils um die Strecke h verlängert worden wären, so daß sie an der äußeren Begrenzung der Lauffläche endeten. Da h jedoch gegenüber DA sehr klein ist, wurde darauf verzichtet.

Bild 51: Zusammenhang zwischen den Abmessungen des Reifens und seinem Ersatzmodell



5.1.2. Die Kraftverteilung im Gürtel beim unverformten Reifen.

Die Kenntnis der Kraftverteilung im Gürtel, verursacht durch den Innendruck beim unverformten Reifen, ist für die Dimensionierung des Reifencords sehr wichtig. Dehnunsmessungen, die Rückschlüsse auf Kräfte im Gürtel ermöglichten, sind bereits mehrfach durchgeführt worden. Der nötige Aufwand ist jedoch sehr groß und die Genauigkeit der Ergebnisse schwer abzuschätzen Außerdem sind systematische Untersuchungn, die den Einfluß des Reifenquerschnittes erfassen, sehr aufwendig, da sehr viele Versuchsreifen hergestellt werden müßten.
Da mit dem vorhandenen Rechenprogramm auch die Kräfte im Gürtel berechnet werden konnten, lag es nahe, den Einfluß des Gürtelquerschnittes auf die Kraftverteilung im Gürtel zu untersuchen. Der Einfachheit halber wurde zunächst ein kreisförmiger Gürtelquerschnitt gewählt. Kreisförmig bedeutet beim Ersatzmodell, daß alle Gelenkpunkte eines Radialstabsystems im Bereich des Gürtels auf einem Kreis liegen.
Die Gürtelgeometrie liegt dann eindeutig fest, wenn der Gürtelradius GR des Gürtelkreises, der Mittelpunkt des Gürtelkreises und die Anzahl der Gelenkpunkte, die zum Gürtel gehören, bekannt sind. (Bild 52).
In Abhängigkeit der beiden Parameter GR und GRNP wurde nun die Kraftverteilung im Gürtel untersucht. Zunächst wurde bei Reifen 1 und 2 (Daten s. Kap. 7) GRNP variiert. Die Auswirkungen auf die Kraftverteilungen sind in Bild 53 dargestellt. Es ist ersichtlich, daß auffallende Änderungen des Verlaufs von GK_N bei verändertem GRNP nur am Gürtelrand festzustellen sind. Diese Belastungsextreme am Rand haben ihre Ursache in dem Knick, der an der Übergangsstelle Seitenwand-Gürtel entstehen kann.
Die in Bild 53 erkennbaren Zusammenhänge sind schematisch in Bild 54 dargestellt.

Fall A:
Die Gürtelkraft ist am Rand sehr viel kleiner als die im übrigen Bereich des Gürtels. Unter Umständen kann GK < 0 sein, so daß der Gürtel durch eine Druckkraft belastet wird.

Fall B:
Die Kraft GK ist über die gesamte Breite nahezu konstant.

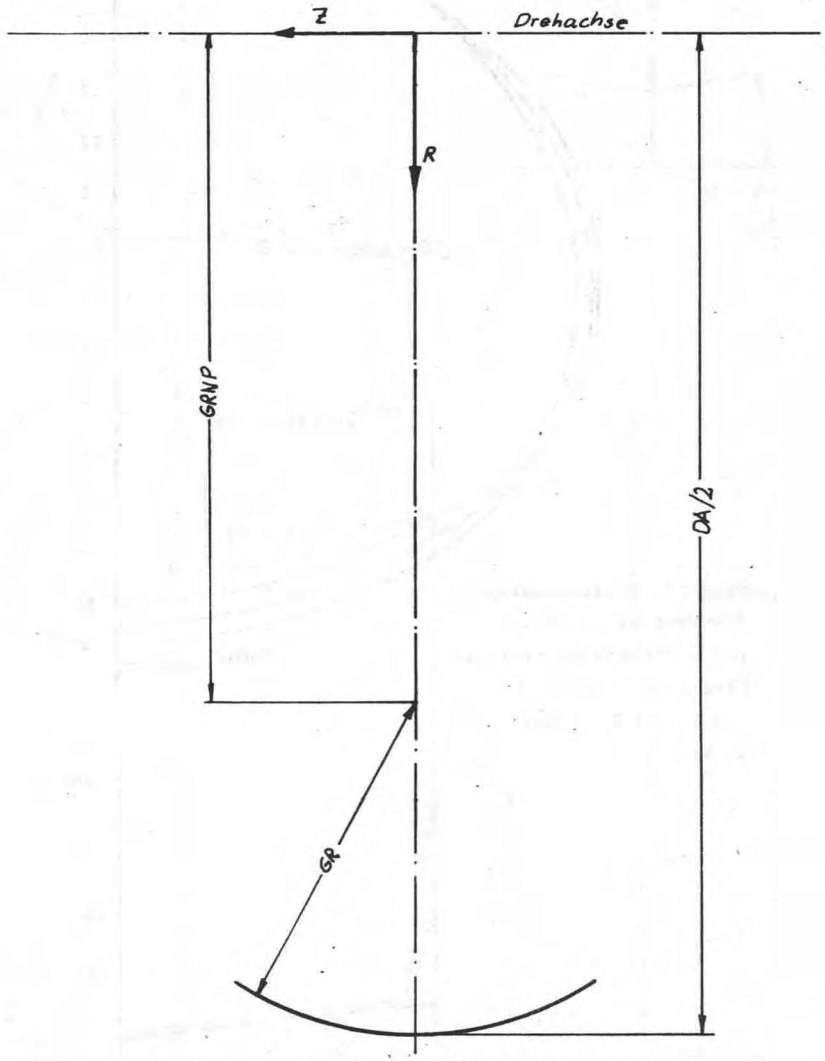


Bild 52: Die Definition des Gürtelquerschnittes

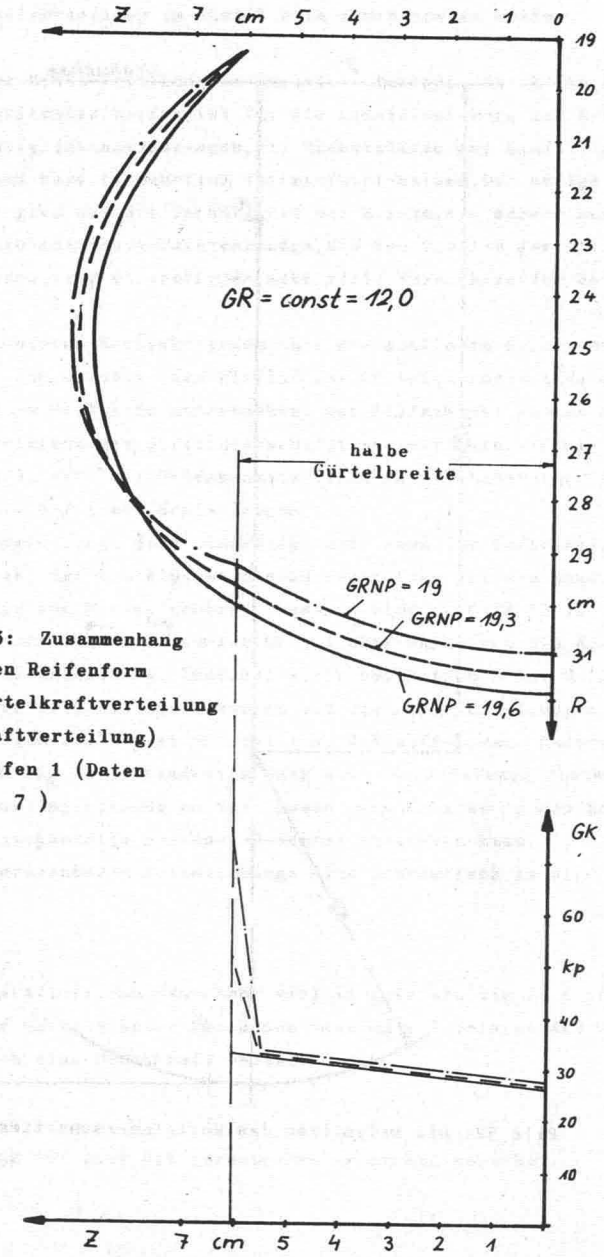


Bild 53: Zusammenhang zwischen Reifenform und Gürtelkraftverteilung (Zugkraftverteilung) für Reifen 1 (Daten s. Kap. 7)

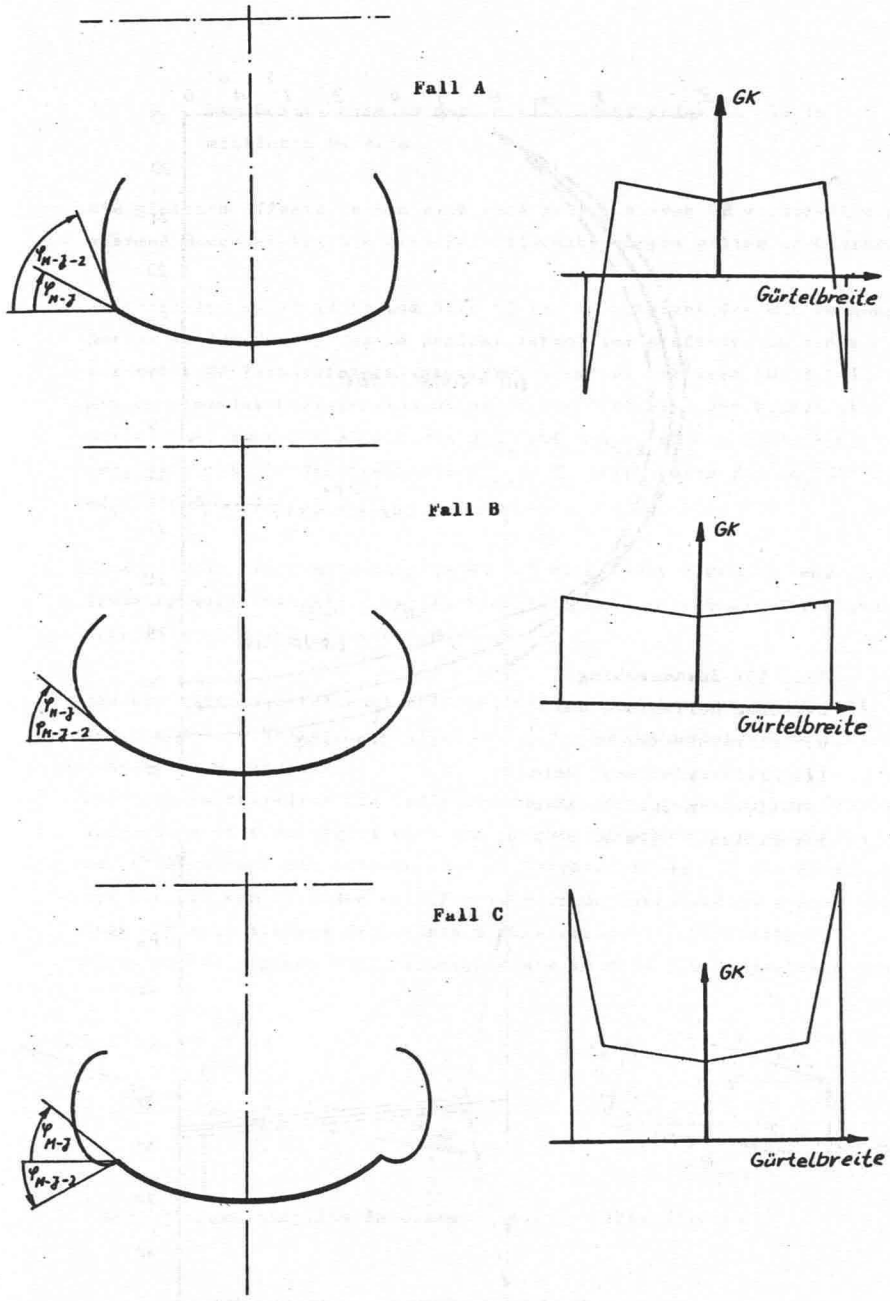


Bild 54: Zusammenhang zwischen Querschnittsform und Gürtelkraftverteilung

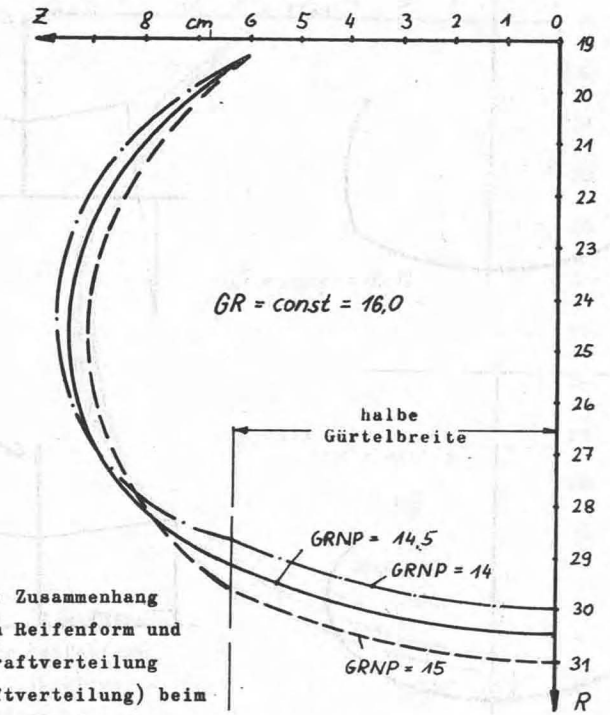
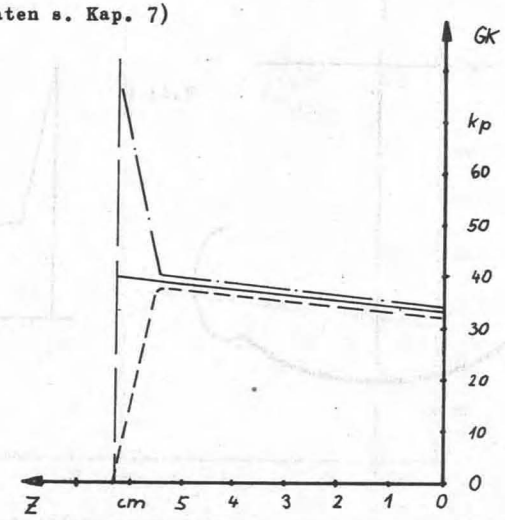


Bild 55: Zusammenhang zwischen Reifenform und Gürtelkraftverteilung (Zugkraftverteilung) beim unverformten Gürtelreifen für Reifen 1 (Daten s. Kap. 7)



Fall C:
Der Gürtel wird am Rand viel stärker belastet als im mittleren Bereich.

Die gleichen Effekte lassen sich auch erzeugen, wenn GR verändert wird, während DA=const ist. Die drei Fallunterscheidungen gelten auch hierbei.

Im Vergleich von Bild 53 und Bild 55 ist zu erkennen, daß mit zunehmendem Radius GR der Betrag von GK zunimmt. Anhand des Kraftecks an einem Gelenk im Gürtelbereich ist das sehr leicht zu erklären (Bild 56). Mit zunehmendem Gürtelradius GR nimmt die Differenz der Winkel ab. Damit nimmt auch der Anteil von SLG_N und SLG_{N+2} ab, der $GK_N*COS(\theta)$ entgegenwirkt. Für den Grenzfall $\varphi_{N+2} = \varphi_N$ ergibt sich für $GK_N*COS(\theta) = K_N/(2*COS\varphi_{N+1})$.

Eine gleiche Kraftverteilung im Gürtel wird somit erreicht, wenn die Krümmung möglichst klein ist, im Grenzfall Null, so daß der Gürtelquerschnitt eine Gerade darstellen würde.

Aus den bisher getroffenen Feststellungen läßt sich nun die Anzahl der sinnvollen Variationsmöglichkeiten der kreisförmigen Gürtelquerschnittsform begrenzen.
Wenn der Gürtelradius, die Gürtelbreite und die Breite vor dem Bombieren vorgegeben sind, so ergibt sich der Außendurchmesser in Grenzen von ca. ± 10 mm, wenn man extreme Zug- und Druckbelastung in den Randzonen des Gürtels ausschließen will. Für sehr große Gürtelradien ergibt sich dann ein sehr kleines Verhältnis H/BMAX (Bild 57). Für kleinere Gürtelradien ergeben sich Formen, wie sie in Bild 57b dargestellt sind.

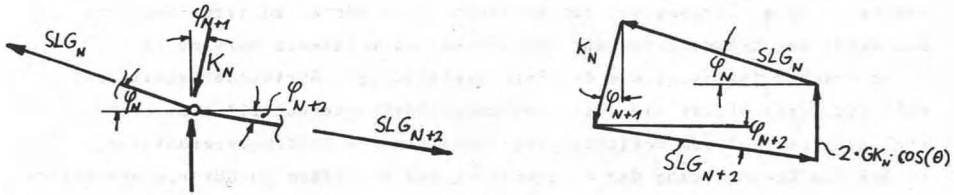


Bild 56: Schnittkräfte an einem Gelenk im Gürtelbereich

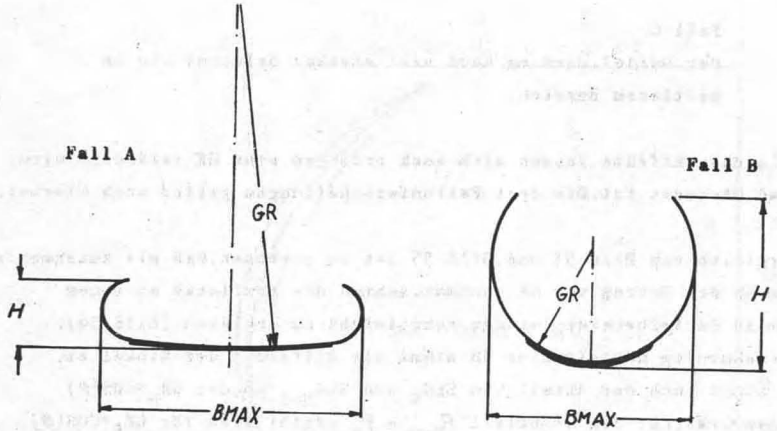


Bild 57:Zusammenhang zwischen Querschnittsform und Gürtelradius GR bei kreisförmigen Gürtelquerschnitten.

Die Querschnittsform von Gürtelreifen ist daher bei Verwendung von kreisförmigen Querschnitten nur geringfügig veränderlich,da die Grenzen für GR eng sind.
Bessere Möglichkeiten zur Variation der Querschnittsform bietet der ellipsenförmige Querschnitt.Hiermit kann durch geeignete Wahl der Ellipse bei praktisch beliebigem Außendurchmesser der Knick beim Übergang von der Seitenwand zum Gürtel,der zu ungewünschter Beanspruchung am Gürtelrand führt, vermieden werden.Bild 58 zeigt drei verschiedene Reifenquerschnitte,die sich nur durch die Gürtelellipse unterscheiden.

Mithilfe des ellipsenförmigen Gürtelquerschnitts ist es also möglich, den Knick beim Übergang von der Seitenwand zum Gürtel zu vermeiden,ohne daß dabei der Krümmungsverlauf des Gürtels im mittleren Bereich in engen Grenzen festliegt,wie das beim kreisförmigen Gürtelquerschnitt der Fall ist.Damit bietet der ellipsenförmige Gürtelquerschnitt eine sehr viel größere Zahl von Variationsmöglichkeiten des Reifenquerschnittes, so daß die Beschränkung der Untersuchung auf kreisförmige Gürtelquerschnitte eine nicht sinnvolle Einschränkung wäre.Auch kann der Verlauf von GK_N im mittlemn Bereich weitgehend beliebig gestaltet werden,während beim kreisförmigen Gürtelquerschnitt immer das Minimum im mittleren Bereich des Gürtels liegt und GK_N stetig bis in Randnähe ansteigt.

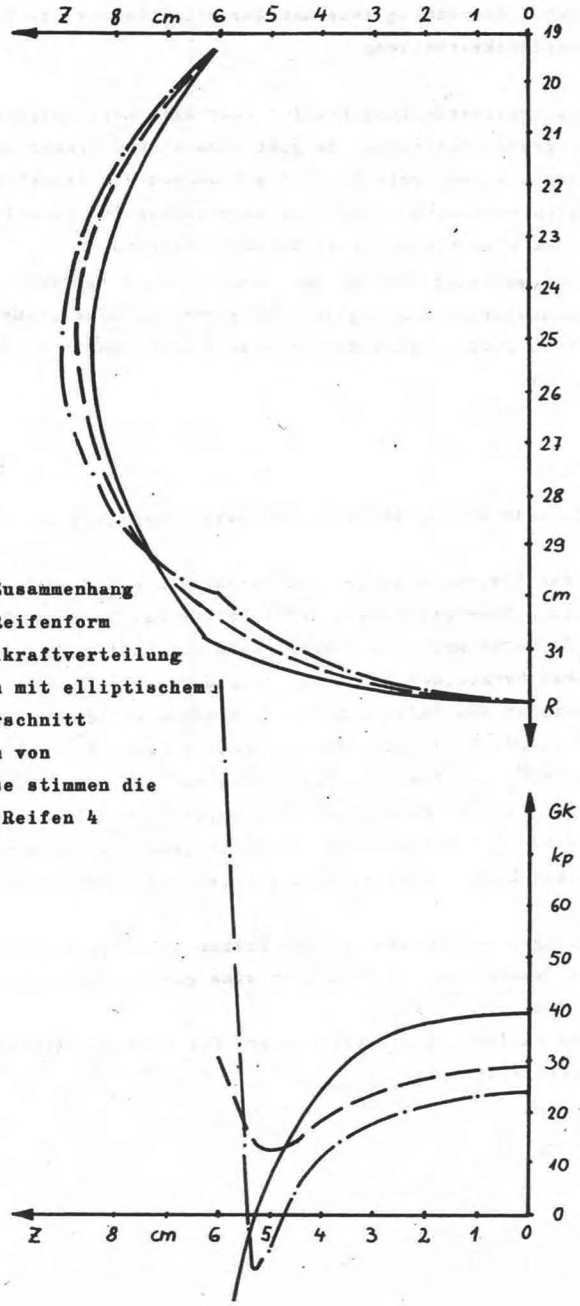


Bild 58: Zusammenhang zwischen Reifenform und Gürtelkraftverteilung bei Reifen mit elliptischem Gürtelquerschnitt (abgesehen von der Ellipse stimmen die Daten mit Reifen 4 überein)

5.1.3. Der Zusammenhang zwischen Querschnittsform des Gürtels und Normaldruckverteilung.

Die Normaldruckverteilung ist für fast alle Reifeneigenschaften von sehr großer Bedeutung. Es gibt auch eine Vielzahl von Veröffentlichungen, die den Verlauf und die Ursachen der Normaldruckverteilung zu erklären versuchen. Eine Vorausberechnung der Normaldruckverteilung ist aber bisher nicht bekannt geworden.
Mit Hilfe des beschriebenen Ersatzmodells und der Rechenverfahren ist diese Vorausberechnung möglich und wurde für eine große Zahl von Reifendaten durchgeführt.Eine kleine Auswahl davon wird im Folgenden dargestellt.

5.1.3.1. Die Abhängigkeit der Normaldruckverteilung vom Luftdruck

Die Bilder 59a und b zeigen das Verhältnis des Normaldruckes PN_L zum Luftdruck p über der Aufstandsfläche für Reifen 1 und 3.Bei der Berechnung von PN_L/p wurde auch die Abhängigkeit vom Luftdruck p untersucht.Es stellte sich dabei heraus,daß PN_L/p unabhängig vom Luftdruck ist.Die Ursache dafür ist,daß das Seileck für verschiedene Luftdrücke geometrisch ähnlich ist.Wird nämlich der Luftdruck p verändert,so bleibt die Richtung der Kräfte $\vec{K}_N$ erhalten.Nur der Betrag von $\vec{K}_N$ ändert sich.
Die Kräfte ZA und ZAR ergeben sich so,daß die Seilecke ähnlich sind.
Damit gelten die Bilder 59 a und b für jeden beliebigen Luftdruck.
Es ist jedoch zu bedenken,daß Dehnungen beim Ersatzmodell nicht zugelassen wurden.
Die Dehnungen werden sich in der Praxis bei großen Luftdruckunterschieden bemerkbar machen,so daß dann doch eine geringe Abhängigkeit vom Luftdruck p vorhanden sein wird.
Folgendes dürfte jedoch,insbesondere für Stahlgürtelreifen,mit guter Genauigkeit zutreffen:

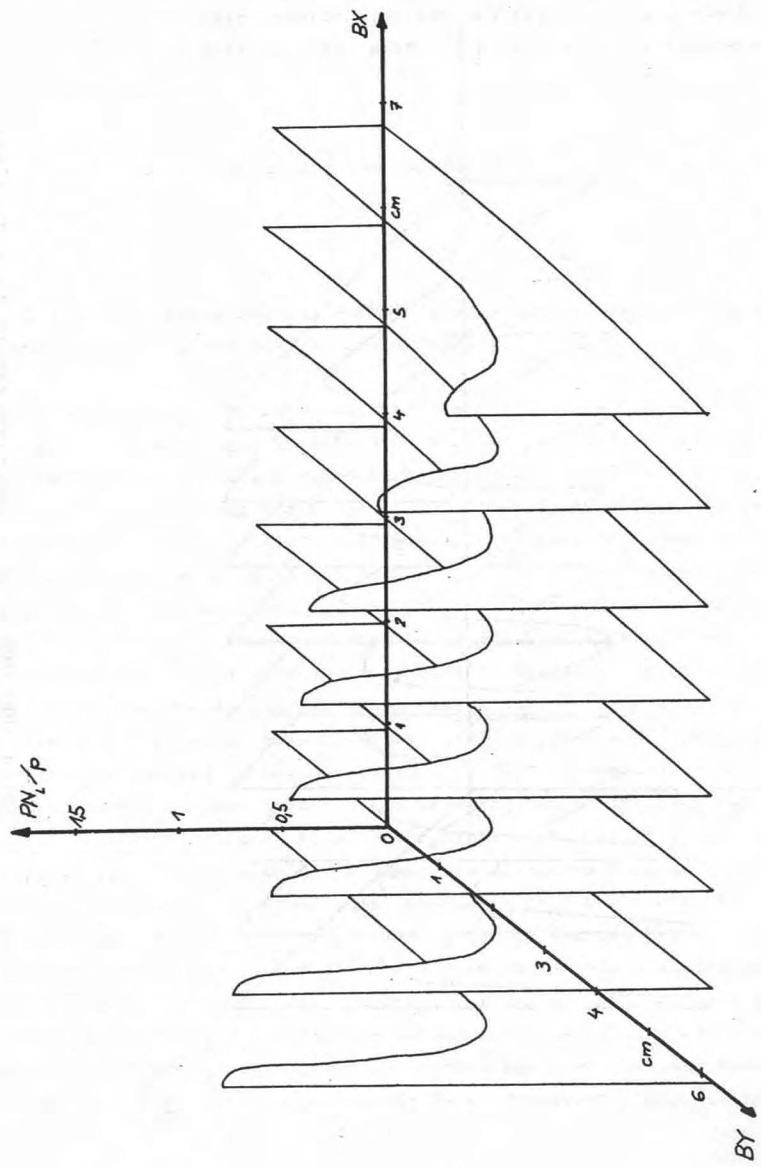


Bild 59a: PN_L/p über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche für Reifen 1 aufgetragen

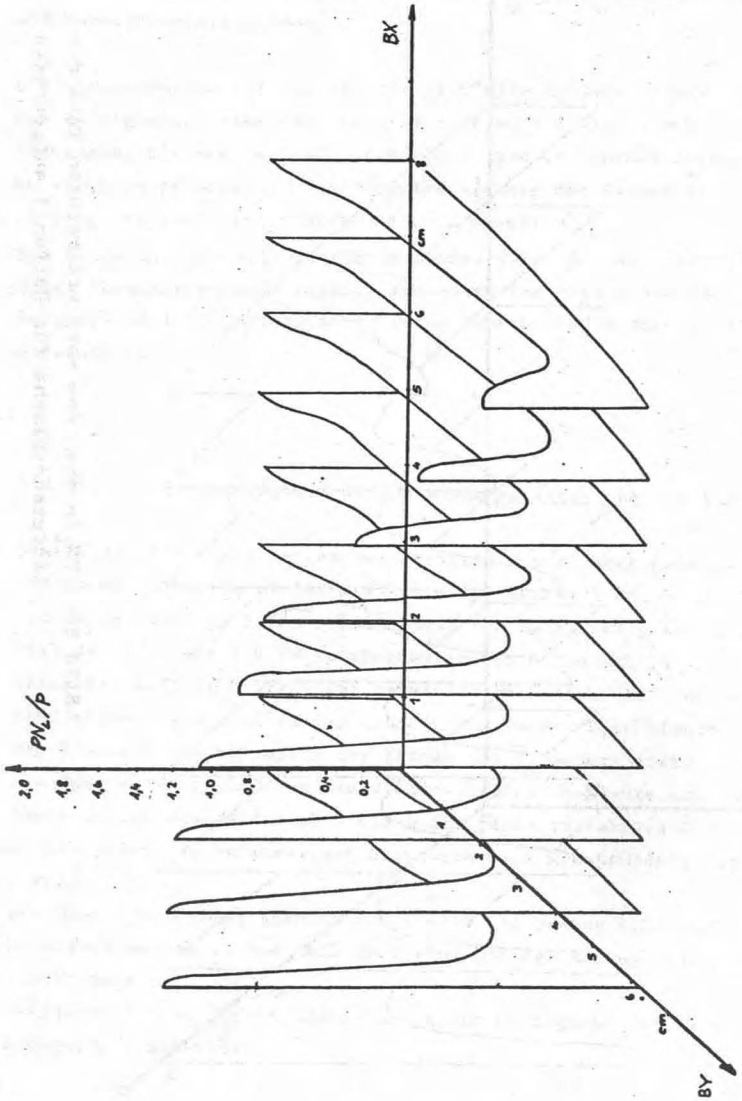


Bild 59b: PN_L/p über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche für Reifen 3 aufgetragen

1. Die Gleichgewichtsform des Reifens ist unabhängig vom Luftdruck. Dies gilt auch für Reifen mit von Null verschiedener Biegesteifigkeit.

2. PN_L/p ist unabhängig vom Luftdruck p.

5.1.3.2. Die Bedeutung des Gürtelquerschnitts und des Laufflächenquerschnitts für die Normaldruckverteilung.

In Bild 59a ist die Normaldruckverteilung für Reifen 1 (Daten siehe unter 7.) aufgetragen. Im mittleren Bereich der Aufstandsfläche wird ein Verhältnis PN_L/p von maximal 0,65 erreicht. Vergleicht man dies mit der Normaldruckverteilung von Reifen 4 (Bild 63,64,65), so muß man feststellen, daß Reifen 4 ein sehr viel günstigeres Verhältnis PN_L/p von maximal 0,93 erreicht (Bei der Biegesteifigkeit =0). Reifen 4 weist demnach ein sehr viel günstigeres Tragverhalten auf als Reifen 1. Dieser Unterschied ist es wert, beide Reifen näher zu untersuchen. Die Querschnitte von Reifen 1 und 4 sind in Bild 60 und Bild 61 dargestellt. Reifen 1 besitzt eine ebene Lauffläche, Reifen 4 eine gekrümmte, deren äußere Begrenzung der Vertikalstäbe eine Ellipse darstellt. Betrachtet man nun die Reifen 1 und 4 im verformten Zustand (Bild 60b und 61 b), so liegt der wesentliche Unterschied darin, daß bei Reifen 1 der Gürtelquerschnitt in der Z-R-Ebene 1 erhalten bleibt, während dies bei Reifen 4 nicht der Fall ist. Im verformten Zustand hat sich die Krümmung im mittleren Bereich des Gürtels vermindert, so daß PN_L/p näher an den Grenzwert 1 heranrückt. Der wesentliche Vorteil bei der Verwendung von Reifen mit gekrümmten Lauf - flächen besteht darin, daß die Gürtelform im unverformten Zustand kompromißlos auf diesen Zustand ausgelegt werden kann, während im eingefederten Zustand durch geeignete Krümmung der Lauffläche dem Gürtel eine gewünschte Verformung aufgezwungen werden kann, so daß ganz bestimmte Eigenschaften, z.B. eine gewünschte Normaldruckverteilung, erzielt werden können.

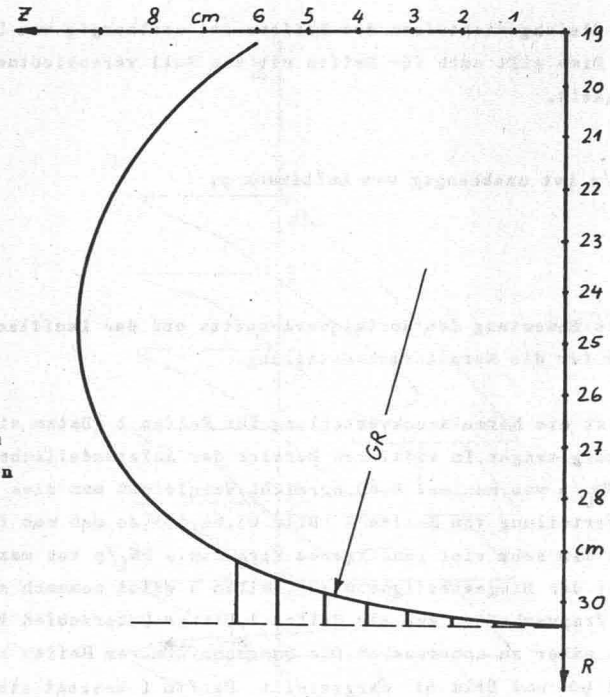


Bild 60a:
Reifen 1 im unverformten Zustand

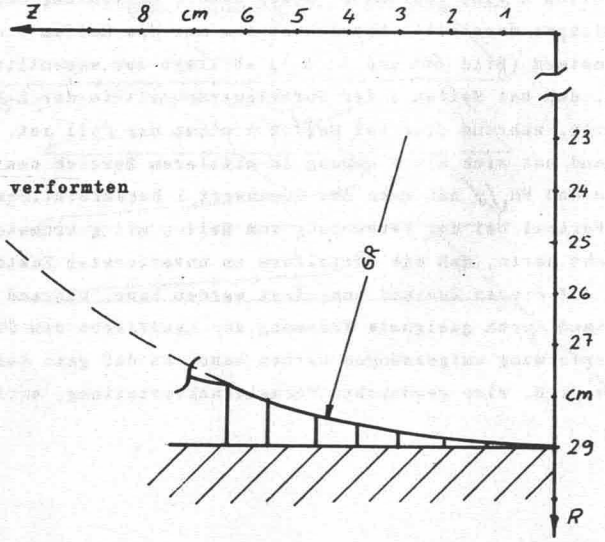


Bild 60b:
Reifen 1 im verformten Zustand

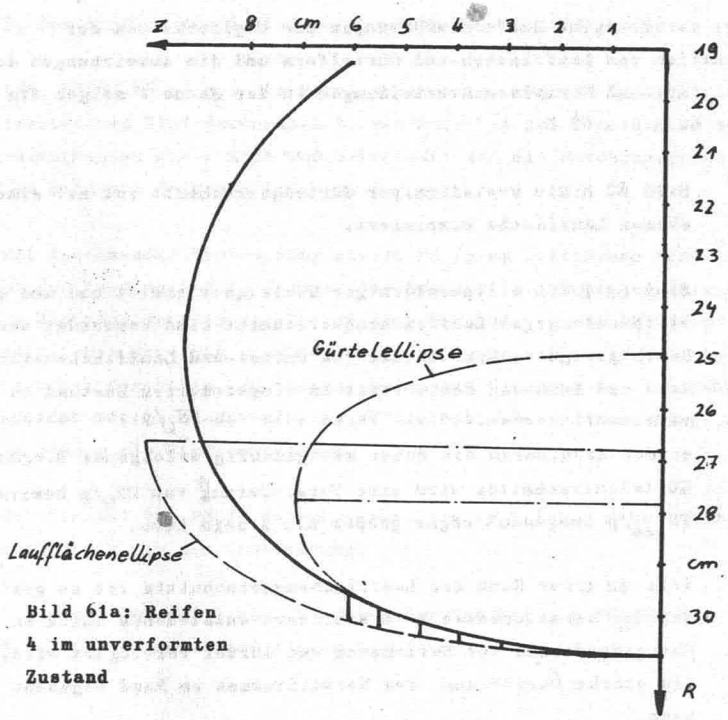


Bild 61a: Reifen 4 im unverformten Zustand

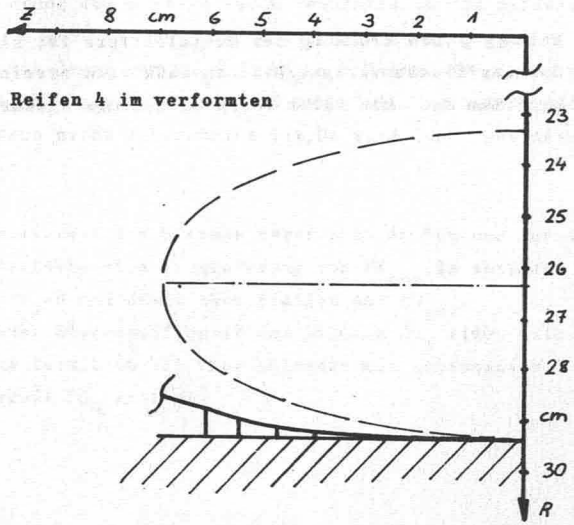


Bild 61b: Reifen 4 im verformten Zustand

Einige verschiedene Reifenausführungen und Möglichkeiten der Kombination von Laufflächen-und Gürtelform und die Auswirkungen auf die Gürtelkraft-und Normaldruckverteilungen in der Ebene 1 zeigen die Bilder 62 A bis 62 D .

Bild 62 A:Ein kreisförmiger Gürtelquerschnitt ist mit einer ebenen Lauffläche kombiniert.

Bild 62 B:Ein ellipsenförmiger Gürtelquerschnitt und ~~und~~ ein ellipsenförmiger Laufflächenquerschnitt sind verwendet worden. Durch geeignete Kombination von Gürtel-und Laufflächenellipse kann die Krümmung des Gürtels im eingefederten Zustand so vermindert werden,daß ein Verhältnis von PN_L/p von nahezu 1 erreicht werden kann.Durch die dabei zwangsläufig erfolgende Biegung des Gürtelquerschnitts wird eine Vergrößerung von PN_W/p bewirkt,so daß PN_{ges}/p insgesamt sogar größer als 1 sein kann.

Bild 62 C:Der Rand des Laufflächenquerschnitts ist so gestaltet, daß der normalerweise beim Einfedern entstehende Knick an der Übergangsstelle von Seitenwand und Gürtel verringert wird,so daß die starke Überhöhung des Normaldruckes am Rand abgebaut werden kann.

Bild 62 D :Die Krümmung der Gürtelellipse ist kleiner als die der Laufflächenellipse.Dadurch läßt sich erreichen,daß $PN_L/p > 1$ wird.Zum Rand hin fällt PN_L/p allerdings wieder ab.

5.1.3.3. Der Einfluß der Einfederung und der Biegesteifigkeiten

Die Bilder 63,64,65 zeigen die Normaldruckverteilung von Reifen 4 bei verschiedenen Einfederungen.Läßt man zunächst den Einfluß der Biegesteifigkeiten außer Acht und betrachtet nur die durchgezogenen Linien,so kann man folgende Aussagen machen:

Mit zunehmender Einfederung steigt PN_L/p am seitlichen Rand an. Dieser Anstieg ist im Bereich der Ebene 1 am größten und nimmt in Richtung des Ein-und Auslaufs ab.Der Anstieg von PN_L/p am seitlichen Rand mit zunehmender Einfederung hat seine Ursache in einem durch die Einfederung bedingten Knick an der Übergangs= stelle Seitenwand-Gürtel.Dieser Knick ist umso stärker ausgeprägt je größer die Einfederung ist.

Der Verlauf von PN_L/p ist abgesehen vom seitlichen Rand nahezu unabhängig von der Einfederung.

Abgesehen vom seitlichen Rand ist der Verlauf von PN_L/p über die Länge der Aufstandsfläche konstant.

Der Einfluß der Biegung des Gürtels wurde ebenfalls in den Bildern 63,64,65 dargestellt.Dort ist PN_{ges}/p gestrichelt gezeichnet. PN_{ges} ergibt sich als Summe von PN_L, PN_G, PN_W . Infolge der geringen Federsteife C_N ist PN_W sehr klein,so daß der Einfluß der Federsteife C_N aus diesen Bildern nicht ersichtlich ist.Er wird daher gesondert in Bild 66 dargestellt.

Die Biegesteifigkeit des Gürtels verursacht am Ein-und Auslauf der Aufstandsfläche eine Vergrößerung von PN_{ges}.Im übrigen Bereich ist $PN_G=0$ und damit ohne Einfluß auf PN_{ges}. Mit zunehmender Biegesteifigkeit des Gürtels CG_N nimmt auch PN_G zu,so daß letztlich die Tragfähigkeit mit zunehmender Biegesteifigkeit CG_N zunimmt.

Der Einfluß der Biegesteifigkeit des Gürtels auf die Normaldruckverteilung ist in der Literatur schon häufig veröffentlich worden z. B. (2,3,6,), so daß die zu erwartenden Ergebnisse bekannt waren.
Die Schwierigkeit der rechnerischen Untersuchung des Einflußes der Biegesteifigkeit CG_N auf die Normaldruckverteilung bestand darin, daß es nicht gelang die Form des Ein-und Auslaufs zu berechnen. Die Winkel $\varsigma 1_{EMAX+1}$ und $\varsigma 1_{EMAX+2}$ sind jedoch zur Berechnung der Normalkräfte am Ein-und Auslauf erforderlich (Bild 44).
Um dennoch eine Berechnung durchführen zu können, wurde die Form des Ein-und Auslaufs solange verändert, bis die erhaltene Normaldruckverteilung Übereinstimmung mit den bekannten Veröffentlichungen zeigte.
Diese Vorgehensweise ist sicher nicht sehr befriedigend, denn ein ganz wesentlicher Parameter, die Form des Ein-und Auslaufs, geht nicht in die Rechnung ein. Es wäre aber denkbar, daß die Form des Ein-und Auslaufs in Abhängigkeit von einigen Parametern z. B. der Einfederung und dem Luftdruck experimentell bestimmt wird, so daß als Veränderliche danach entsprechend die Winkel $\varsigma 1_{EMAX+1}$ und $\varsigma 1_{EMAX+2}$ eingegeben werden könnten.
Im Rahmen dieser Arbeit war dies leider nicht möglich.

Der Einfluß der Biegesteife C_N auf die Normaldruckverteilung ist aus den Bildern 66 A,B,C ersichtlich. Dort wird PN_W/p dargestellt und damit nur der Anteil, der direkt durch die Biegesteifigkeit C_N verursacht wird.
Es ist dabei zu bedenken, daß für diese schematische Darstellung nur eine sehr kleine Zahl der Variationsmöglichkeiten der Reifenquerschnittsform ausgewählt werden konnte.

Bild 66 A:Der Knick an der Übergangsstelle Seitenwand-Gürtel hat dort ein großes Moment MD_{M-J} zur Folge, das die Hauptursache für den dargestellten Verlauf darstellt.Nimmt die Einfederung zu, so wird auch MD_{M-J} vergrößert und damit auch $|PN_W/p|_{MAX}$.
Ein Knick an der Übergangsstelle Seitenwand-Gürtel führt demnach auf 2 verschiedene Weisen zu einer Überhöhung von PN_{ges}/p am seitlichen Rand der Aufstandsfläche. Einmal durch die eben beschriebene Biegung zum andern durch die Richtungsänderung der Kraft.

SL_{M-J}, die das Kräftegleichgewicht am Punkt M-J ändert.

Bild 66 B:Bedingt durch den ellipsenförmigen Laufflächenquerschnitt erfolgt eine Durchbiegung der Lauffläche und des Gürtels in der Z-R-Ebene.
Durch geeignete Auswahl der Gürtelellipse und der Laufflächenellipse kann der Knick an der Übergangsstelle Seitenwand-Gürtel vermindert werden,so daß das Moment MD_{M-J} klein wird. Durch die Biegung der Lauffläche treten nun Momente auch an den Punkten N,M-J auf, so daß auch für N,M-J+2 $PN_W/p=0$ ist. Diese Tatsache kann bei geeigneter Wahl der Ellipsenparameter dazu genutzt werden, den Verlauf von PN_W/p relativ frei zu gestalten. So kann z.B. auch verhindert werden,daß $PN_W/p= 0$ wird.

Bild 66 C: Der Reifen weist im unverformten Zustand einen nicht gekrümmten Gürtelquerschnitt auf.Die Laufflächenbegrenzung hingegen ist ellipsenförmig.Bei diesem Beispiel verhält es sich ähnlich wie im Fall B, denn auch hier wird die Lauffläche und der Gürtel in gleicher Weise gebogen. Die Möglichkeiten zur Erzielung ganz bestimmter Verläufe von PN_W/p sind allerdings begrenzter, da weniger Variationsmöglichkeiten für die Reifenquerschnittsform existieren.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Biegesteifigkeit C_N beim verwendeten Ersatzmodell quantitativ von sehr geringem Einfluß auf die Normaldruckverteilung ist.Es ist allerdings zu bedenken,daß bei wirklichen Reifen durch die gekreuzten Gürtellagen die entsprechende Biegesteifigkeit C_N im Bereich des Gürtels größer sein wird als im Bereich der Seitenwand. Auch wird die unterschiedliche Wanddicke sicherlich zu unterschiedlichen Biegesteifigkeiten mit beitragen. Da genaue Zahlenwerte nicht vorlagen und auch die Übersichtlichkeit leiden würde, wurde C_N als konstant angenommen.

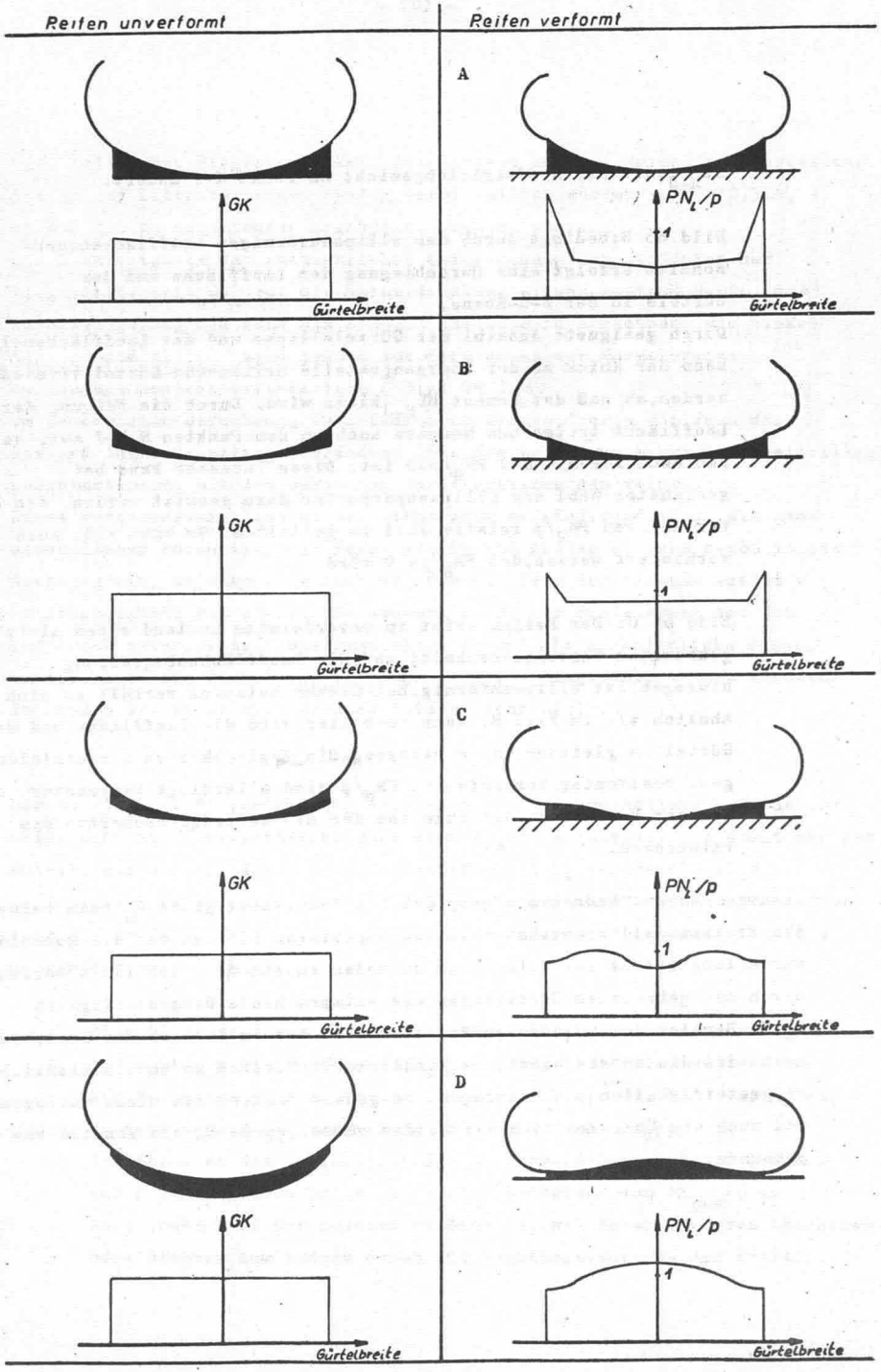


Bild 62: Zusammenhang zwischen Querschnittsform, Gürtelkraft= verteilung und Normaldruckverteilung

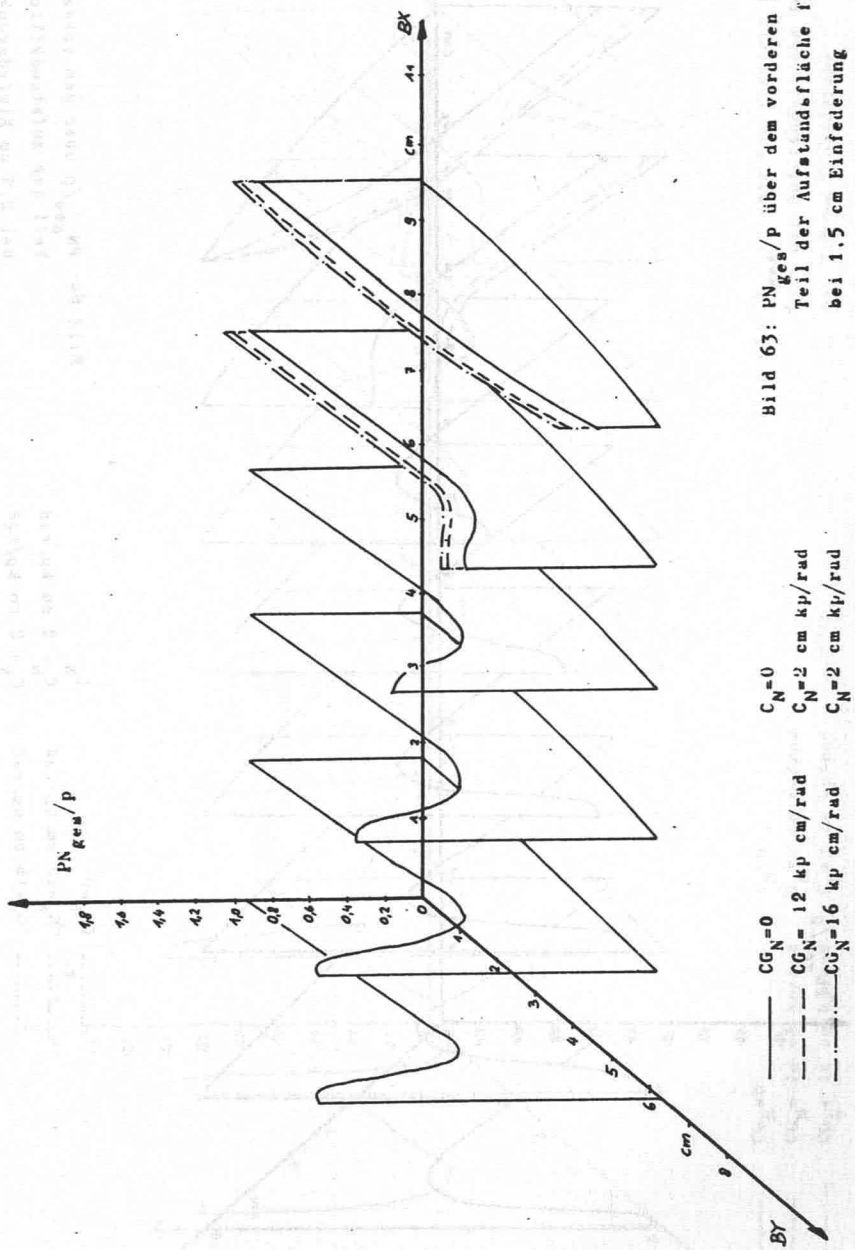
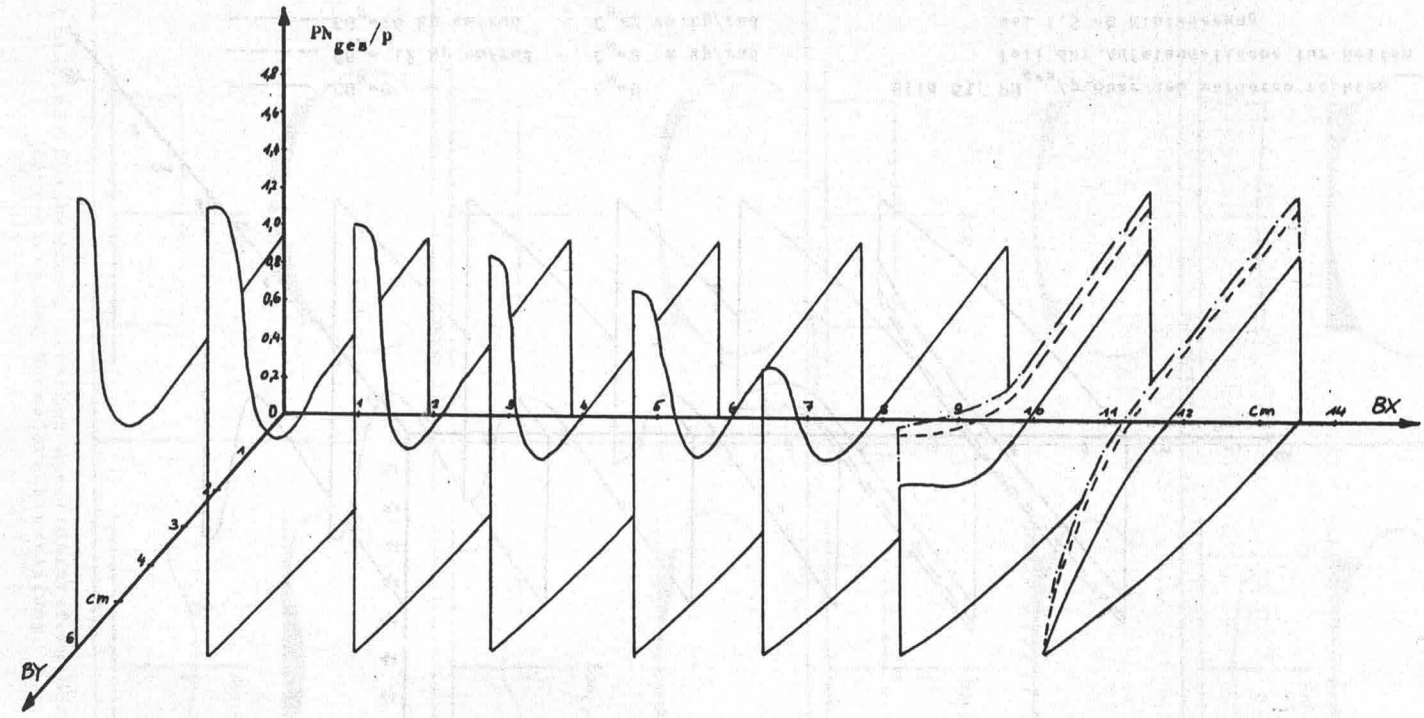
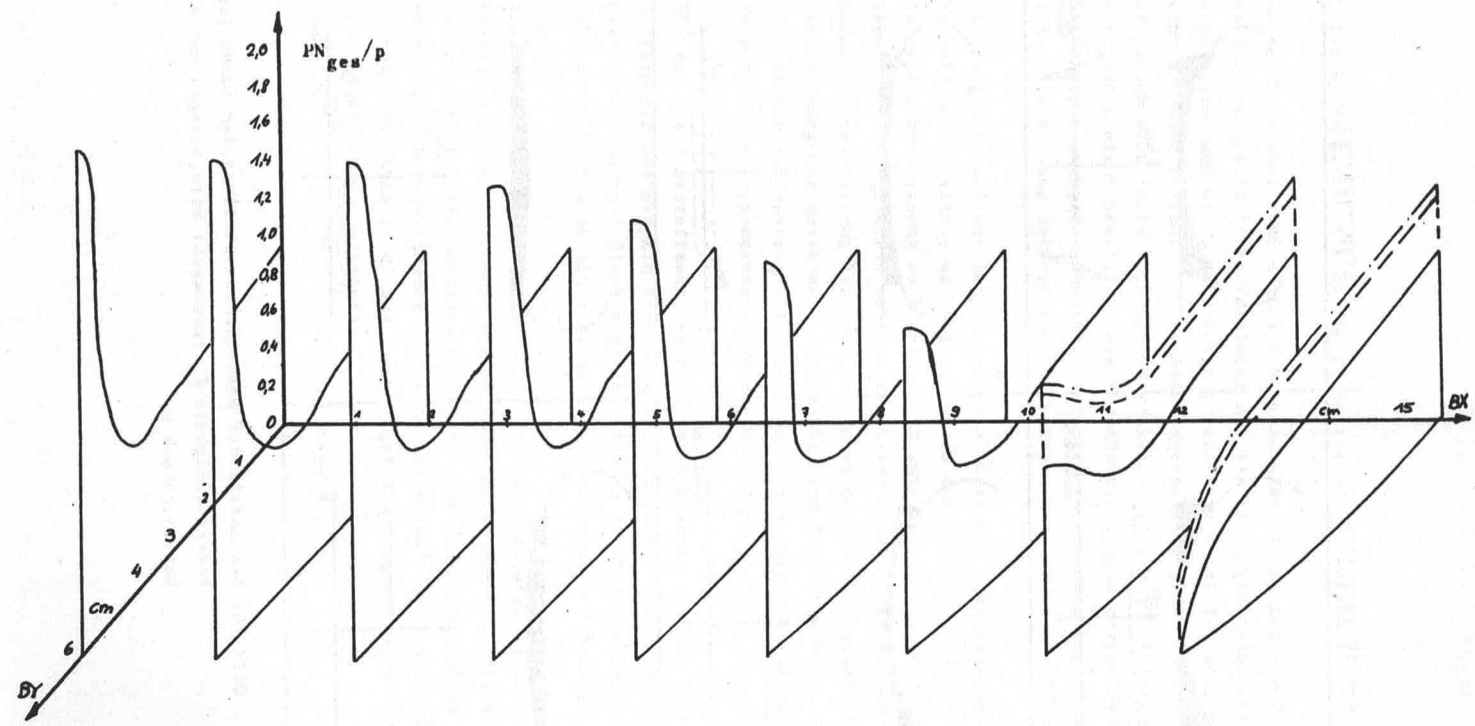


Bild 63: PN_{ges}/p über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche für Reifen 4 bei 1.5 cm Einfederung



——— $CG_N=0$ $C_N=0$
– – – – $CG_N=12$ cm kp/rad $C_N=2$ cm kp/rad
—·—·— $CG_N=16$ cm kp/rad $C_N=2$ cm kp/rad

Bild 64: PN_{ges}/p über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche für Reifen 4 bei 2,5 cm Einfederung



——— $CG_N=0$ $C_N=0$
– – – – $CG_N=12$ cm kp/rad $C_N=2$ cm kp/rad
—·—·— $CG_N=16$ cm kp/rad $C_N=2$ cm kp/rad

Bild 65: PN_{ges}/p über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche für Reifen 4 bei 3,5 cm Einfederung

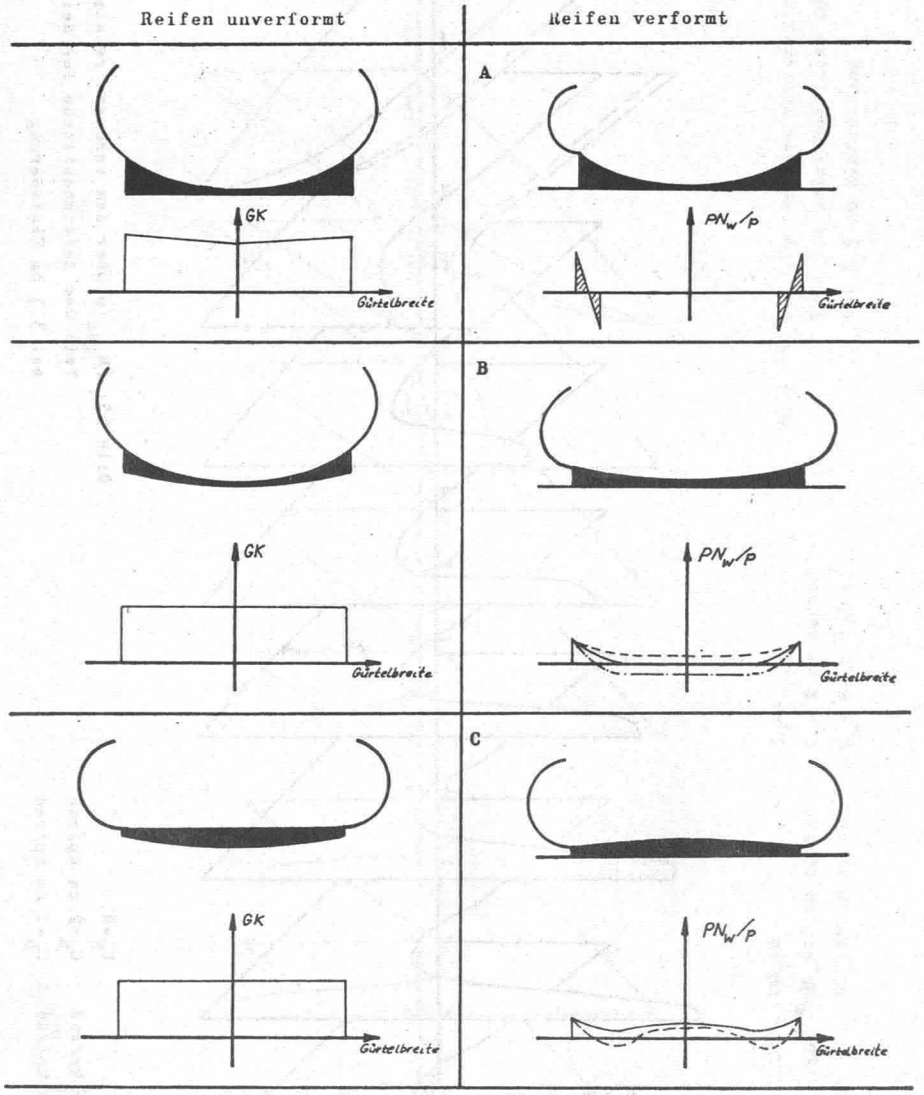


Bild 66: Der Anteil der Normaldruckverteilung, der durch die Federsteifigkeit C_N verursacht wird, bezogen auf den Luftüberdruck p.

5.1.3.4. Vergleich der Rechenergebnisse mit veröffentlichten Meßergebnissen

In der Literatur sind mehrfach Normaldruckverteilungen veröffentlicht worden. Ein qualitativer Vergleich mit dem hier erhaltenen Rechenergebnissen und den publizierten Ergebnissen zeigt, daß auch meßtechnisch ein ähnlicher Verlauf der Normaldruckverteilung gemessen wurde, wie er in den Bildern 59, 63, 64, 65 dargestellt ist. Ein quantitativer Vergleich ist jedoch nicht möglich. In den Veröffentlichungen werden zwar immer die Reifentypen angegeben, an denen Messungen vorgenommen wurden, doch die für eine Nachrechnung notwendigen Reifendaten sind nicht veröffentlicht.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Clark [3], der Messungen der Normaldruckverteilung an Kreiszylindern durchführte, um die Ursachen der Normaldruckverteilung zu klären, zeigt gute Übereinstimmung.
Clark hat ebenfalls, wie es auch in dieser Arbeit geschah, den Anteil der Normaldruckverteilung bestimmt, der durch Gürtelbiegung, Luftinnendruck, Stützwirkung der Seitenwand verursacht wird. Weiterhin wurde von ihm der Einfluß der Einfederung untersucht. Das verwendete Ersatzmodell lieferte jedoch nur zweidimensionale Druckverteilungen.

Die von Clark getroffenen Feststellungen stimmen mit den hier gemachten Erfahrungen überein. Ein Vergleich ist allerdings nur in beschränktem Umfang möglich, weil Clark zweidimensionale Druckverteilungskurven erhält, so daß ein Vergleich mit räumlichen Verteilungen nur bedingt möglich ist.

Insgesamt konnte nur ein kleiner Teil der erhaltenen Ergebnisse mit anderen Arbeiten überprüft werden, doch ist zu erwarten, daß auch die übrigen Ergebnisse zumindest qualitativ für den Gürtelreifen gelten werden. Die Übereinstimmung wird umso besser sein je weniger der Cord dehnbar ist (Stahlcord) und je geringer die Fadenwinkel von der Umfangs- bzw Radialrichtung abweichen.

5.2. Die Verschiebungen und Gleitbewegungen im Bereich der Aufstandsfläche in Abhängigkeit von der Reifenquerschnittsform

Die Vorgänge im Reifen im Bereich der Aufstandsfläche sind bedeutend für viele Reifeneigenschaften. Wie bereits unter 4.2.2. ausgeführt wurde, ist ein Zusammenhang zwischen dem Rollwiderstand, dem Verschleiß und der Form des Stabnetzes der Aufstandsfläche wahrscheinlich.
Die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Reifenquerschnittsform und Stabnetzgeometrie eröffnet sicherlich Möglichkeiten zur Verbesserung von Reifeneigenschaften.
Vier verschiedene Möglichkeiten zur Gestaltung der Reifenquerschnittsform sind in Bild 70 dargestellt.

Bild 70 A zeigt einen Reifenquerschnitt, dessen Gürtelquerschnitt nicht gekrümmt ist. Das Stabnetz der Aufstandsfläche besteht dann aus gleichgroßen Rechtecken. Diese Stabnetzform müßte hinsichtlich Verschleiß und Reibungs- und Hystereseverlust im Reifen im Bereich der Aufstandsfläche und in der Aufstandsfläche selbst - freies langsames Rollen vorausgesetzt - am günstigsten sein, da keinerlei Relativbewegungen $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ zu erwarten sind.

Die Bilder 70 B und C zeigen die Stabnetze von Reifen und die Reifenquerschnitte, deren Gürtelquerschnitt kreisform hat.
Der Gürtelradius GR ist in Bild 70 C größer als in Bild 70 B.
Das Stabnetz in Bild C weicht mehr vom "Ideal" nach Bild A ab als das in B dargestellte. Es sind demnach größere Relativbewegungen $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ bei C als bei B zu erwarten.

In Bild 70 D hat der Reifen einen elliptischen Gürtelquerschnitt. Die Form des Stabnetzes läßt erwarten, daß $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ am seitlichen Rand relativ groß sein wird, während im übrigen Bereich $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ relativ zu B und C klein sein wird.

Die BX- und BY Koordinaten des Stabnetzes, die für die Verschiebungen $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ entscheidend sind, hängen nur gerinfügig von der Form der Lauffläche, die beim Ersatzmodell durch die Vertikalstäbe dargestellt

wird, ab. Die Vertikalstablängen VSL_N, sind aus reifentechnischen Gründen nur geringfügig veränderlich. Die Koordinaten $BZ_{E,N}$ stellen den Abstand der Gelenkpunkte des Stabnetzes von der Fahrbahn dar und sind daher mit der Vertikalstablänge VSL_N identisch.
$BX_{E,N}$ und $BY_{E,N}$ sind von $BZ_{E,N}$ abhängig, doch ist ihr Einfluß, wie die Rechenergebnisse zeigten und wie man es sich auch anhand der Gleichungen 17,18,19,31 überlegen kann, gering. Somit gelten die Bilder 70 A,B,C,D näherungsweise auch für gekrümmte Laufflächenbegrenzungskurven.
Um einen Überblick über die Größenordnung der Verschiebung $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ zu vermitteln, wurde für Reifen 4 (Daten s. unter 7.) der Verlauf von $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche in Bild 69 dargestellt, so daß wegen der Symmetrien $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ für die gesamte Aufstandsfläche entnommen werden kann.
Die Absolutgeschwindigkeit der Gelenkpunkte

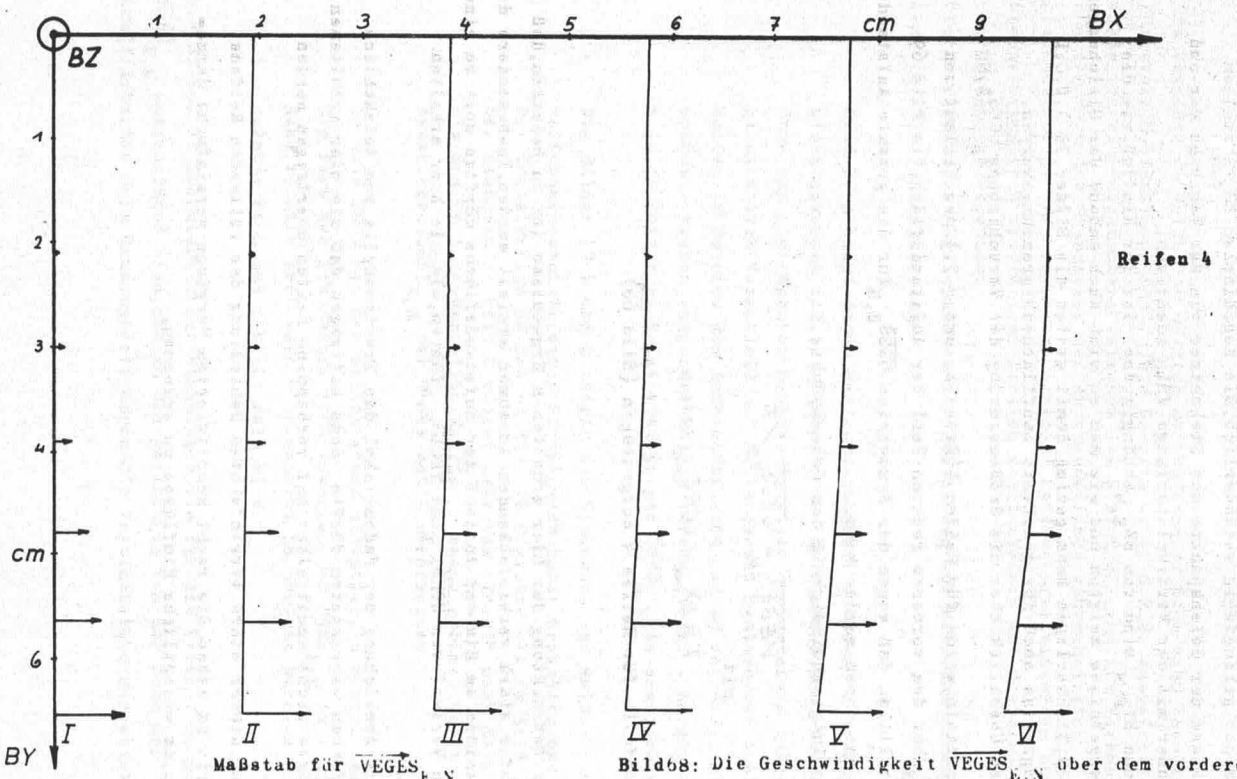
$$\overrightarrow{VEGES}_{E,N} = \overrightarrow{UGES}_{E,N} / T$$

mit

$$T = LX_{M-2} / (GRT_{1,M-2} \cdot \omega)$$

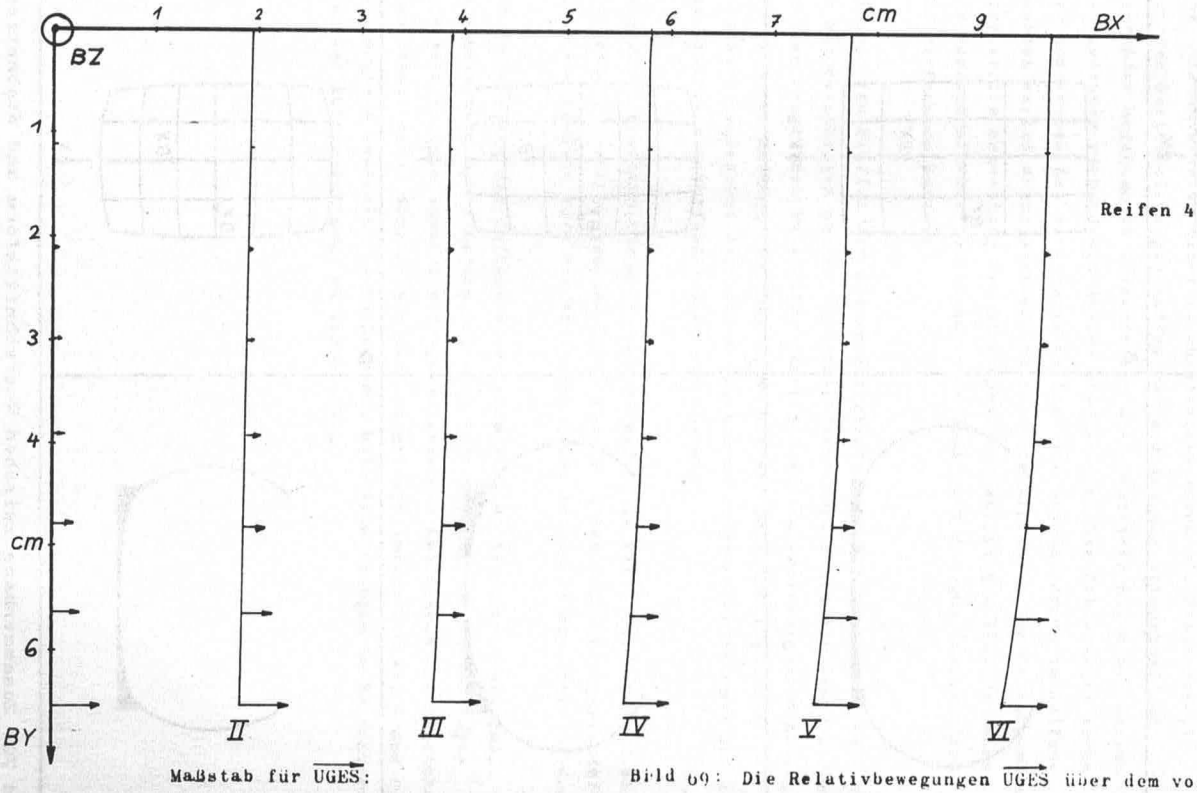
ist ebenfalls für Reifen 4 aufgetragen (Bild 68).

Bei der Betrachtung der hier erhaltenen Ergebnisse ist zu bedenken, daß sie unter stark vereinfachenden Annahmen erzielt wurden. Insbesondere die Verhältnisse am Ein- und Auslauf der Aufstandsfläche dürften dort zu einem anderen Verlauf von $\overrightarrow{UGES}_{E,N}$ und $\overrightarrow{VEGES}_{E,N}$ führen, als sie hier erhalten wurden.
Auch die Abweichung der Fadenwinkel des Ersatzmodells von tatsächlich im Reifenbau verwendeten dürfte dazu beitragen, daß die hier erhaltenen Ergebnisse nicht unmittelbar auf vorhandene Reifen übertragen werden können.
Der Sinn dieser stark vereinfachten Behandlung des rollenden Reifens ist darin zu sehen, die recht komplizierten Vorgänge vereinfacht darzustellen, um wesentliche Einflüsse zu erkennen.



Maßstab für $\overrightarrow{VEGES}_{E,N}$
1 cm Zeichnung = 0,5 cm/sec

Bild68: Die Geschwindigkeit $\overrightarrow{VEGES}_{E,N}$ über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche bei einer Rollgeschwindigkeit von 1,46 m/sec und dem Umfangsschlupf



Maßstab für $\overrightarrow{UGES}$:
1 cm Zeichnung = 1 mm $\overrightarrow{UGES}$

Bild 69: Die Relativbewegungen $\overrightarrow{UGES}$ über dem vorderen rechten Teil der Aufstandsfläche

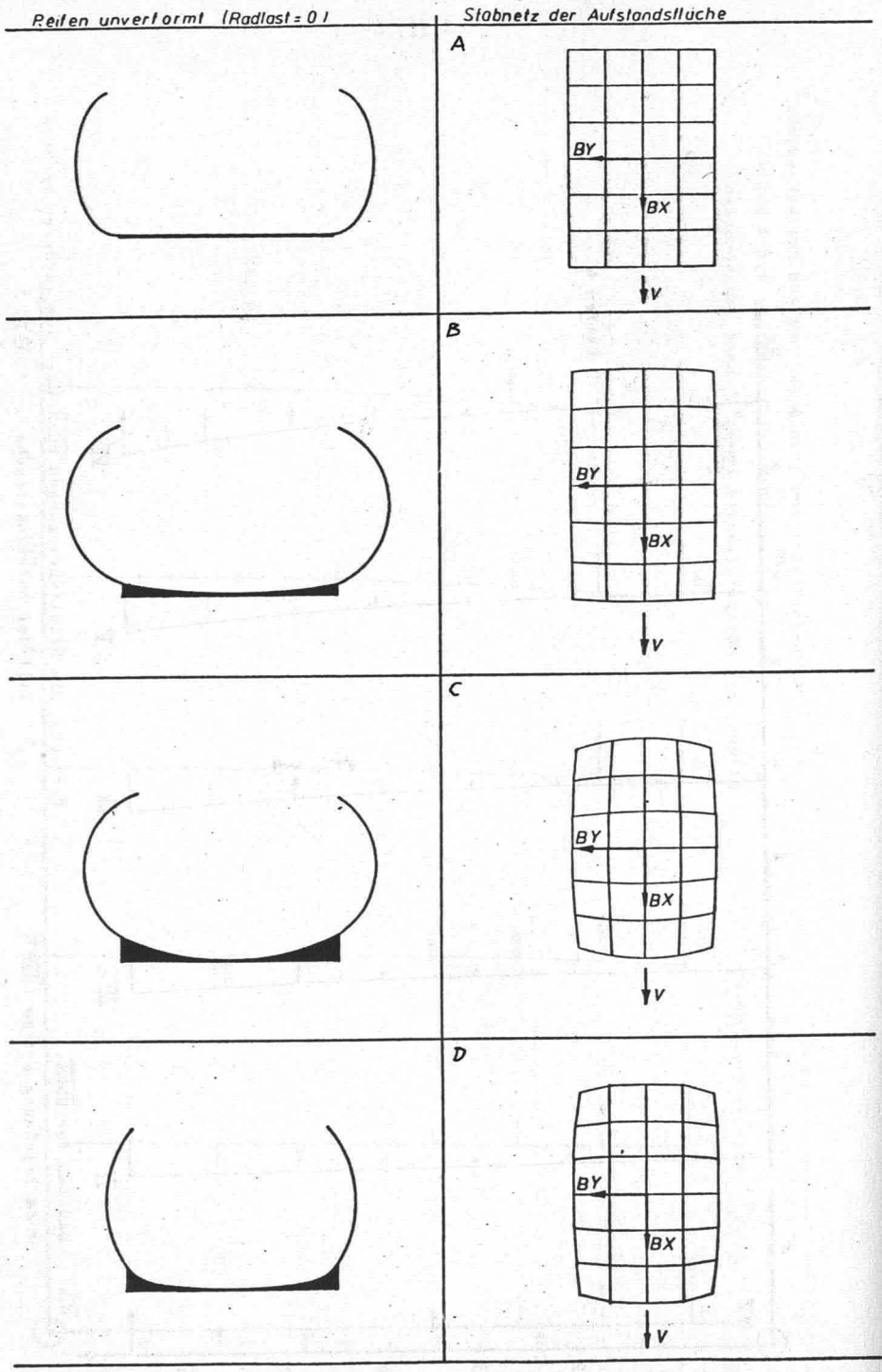


Bild 70: Zusammenhang zwischen Querschnittsform und Stabnetzgeometrie

6. Zusammenfassung

Um die Ursachen der Normaldruckverteilung und die Vorgänge in der Aufstandsfläche näher zu untersuchen, wurde ein Ersatzmodell für den Gürtelreifen geschaffen, bei dem das als orthogonal und undehnbar angenommene Kordwerk der Reifenkarkasse durch ein System von gelenkig verbundenen Stäben ersetzt wird. Die Belastungen durch den Bodendruck des verformten Reifens und den Luftdruck im Reifeninneren werden durch statisch äquivalente Kräfte in den Gelenkpunkten ersetzt. Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen liefert neben der Normalkraft- bzw Bodendruckverteilung auch die Querschnittsform des verformten Reifens.

Um auch den Einfluß der Biegesteifigkeiten von Seitenwand und Gürtel zu berücksichtigen wurden weiterhin Drehfedern statt der zuvor verwendeten Gelenke eingeführt. Es konnten damit Bodendruckverteilungen in Abhängigkeit von der Reifenquerschnittsform und der Biegesteifigkeiten berechnet werden. Die erhaltenen Druckverteilungskurven stimmen mit in der Literatur veröffentlichten gut überein.

Auch die Querschnittsform des Gürtelreifens im nicht verformten Zustand (Radlast=0) wurde untersucht. Dabei konnte neben der Gleichgewichtsform des Gürtelreifens auch die Kraftverteilung im Gürtel berechnet werden.

Der Rollvorgang des Reifens wurde ebenfalls zu berechnen versucht. Es stellt sich dabei heraus, daß ohne Einbeziehung der Verformungseigenschaften von Gummi die Vorgänge zwischen Lauffläche und Fahrbahn quantitativ nicht darstellbar sind. Es gelingt jedoch die auf Grund des Rollvorgangs zwangsläufig vorhandenen Relativbewegungen im Reifenkord über der Aufstandsfläche zu beschreiben.

7. Reifendaten

Reifennr	M	δ	GUMRFZ	p	B	D	B_F	Gürteldaten	C_N	CG_N	Laufflächendaten
-	-	rad	-	$\frac{kp}{cm^2}$	cm	cm	cm	cm	$\frac{cm\ kp}{rad}$	$\frac{cm\ kp}{rad}$	cm
1	46	0,0314	8	2	38,0	38,5	12,0	GR=12,0 GRNP= v*	0	0	eben
2	46	0,0314	8	2	38,0	38,5	12,0	GR=16,0 GRNP= v*	0	0	eben
3	46	0,0628	8	v*	38,0	38,5	12,0	AE=7,2 BE=4,0 ENP=27,8	0	0	eben
4	46	0,0628	8	2	38	38,5	12,0	AE=6,8 BE=4,0 ENP=27,8	2	16 12	AL= 10,0 RL=4,0

v* der Wert dieser Größe ist veränderlich und wird an den entsprechenden Stellen angegeben

Literaturverzeichnis

1 Borgmann,W.:Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Luftreifen bei Schräglauf.Diss TH Braunschweig 1963

2 Martin,H.:Druckverteilung in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Fahrbahn.Kraftfahrtechn. Forschungsarbeiten Bd 2/1936

3 Clark,S.K.:Untersuchung derVerteilung des Auflagedrucks in Luftreifen.Kautschuk und Gummi Nr. 8/1969 S.433

4 Hofferbert,W.:Zur Statik des Luftreifens.Kautschuk und Gummi Nr. 5/1955 S. WT 124

5 Frank,Fritz:Theorie des Reifenschräglaufs.Diss TH Darmstadt 1965

6 Kraft,Paul:Untersuchung über die Größe der Berührungsfläche, der Bodendrücke und Horizontalkräfte an rollenden Luftreifen. Diss TH Stuttgart 1947

7 Albat,E.:Über Straßenschonung und Fahrsicherheit bei Schwerlastfahrzeugen mit Doppelachsen.Diss TH Braunschweig 1964

8 Schlippe/Dietrich:Zur Mechanik des Luftreifens.Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen,Berlin-Adlershof,1942.

9 Fiala,E.:Seitenkräfte am rollenden Luftreifen.ZVDI, 10/1954

10 Böhm,Friedrich:Zur Mechanik des Luftreifens.Habillitationsschrift TH Stuttgart,1966

11 Baba/Iritana:Forces on the contact patch of the tire. Reprint Fisita Tagung 1964

12 Böhm,Friedrich:Örtliche Einebnung eines Cord-Netzes ZAMM 52,(1972) S. T35

13 Böhm,Friedrich:Der Rollvorgang des Automobilrades.GAMM-Sonderheft Bd 43,1963,S. 56

14 Clark,S.K./Budd Ch.B.:Tire shape calculations by the energy method,Kautschuk und Gummi Nr. 12/1972 Seite 587

15 Clamroth,R/Heidemann,W.:Reibungskoeffizienten von Laufflächen=qualitäten bei rollender und gleitender Beanspruchung,Teil 1, Kautschuk und Gummi Nr. 6/1967 S. 336

16 Clamroth,R./Heidemann,W.:Messung der Reibungskoeffizienten von Laufflächenqualitäten bei rollender und gleitender Beanspruchung, Teil 2,Kautschuk und Gummi Nr. 7/67 Seite 413

17 Schmallach,A.:Die Mechanik der Reifenabnutzung.ATZ Nr. 2/1961 S. 56

18 Day/Gehman:Theory of the meridian section of inflated cord tires. Rubber chemistry and technology 36 (1963) S. 11

19 Frank,Fritz:Theorie der Querschnittsform von Kreuzlagen-und Gürtelreifen.Kautschuk und Gummi Nr. 5/1971 S. 251

20 Willumeit,H.:Theoretische Untersuchungen an einem Modell des Luftreifens unter Seiten-und Umfangskraft.Diss 1969 TU Berlin

21 Cooper,D.H./Gough,E.H.:Seitenkraft und Seitenverschiebung in der Berührungsfläche zwischen Reifen und Straße.ATZ 2/1961 S. 51

22 Kern,F.:Verformungs-und Spannungsmessungen an Gürtelreifen. Kautschuk und Gummi Nr. 11/1971 S. 599 und Nr. 12/1971 S. 666

23 Seitz,N.:Die Kräfte in der Berührungsfläche schnell rollender Reifen.VDI-Fortschrittsbericht 1968,Reihe 12,Nr. 19

24 Kummer,Hartwig:Unified theory of rubber and tire friction. The Pensylvania State University,1966,Engineering Research Bulletin B-94

Lebenslauf

Name	: Günter Willmerding
geboren	: 15.8.47
Eltern	: Hans Willmerding,Kaufmann Amanda Willmerding,geb. Lehnhoff
Schule	: Ostern 1954 bis Ostern 1958 Volksschule Hannover Ostern 1958 bis Juni 1967 Gymnasium Hannover Abitur: Juni 1967 an der Lutherschule Hannover
Praktikum	: Während des Studiums wurde in den Semesterferien ein Praktikum in mehreren hannoverschen Firmen durch=geführt.
Studium	: ab 1.11.1967 Technische Universität Hannover, Fachrichtung Kraftfahrwesen. Diplomvorprüfung am 15.11.1969 Diplomhauptprüfung am 11.2.1972
Berufstätigkeit	: Seit 1.4.1972 Doktorand am Institut für Kraftfahrwesen der TU-Hannover Institutsleiter Professor Dr.-Ing. F. Gauß